

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

1.3 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ



1

Ο νόμος της τριβής

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε:

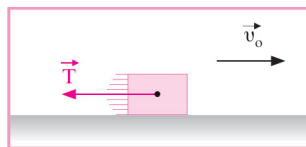
- ✓ Την τριβή ολίσθησης και τα χαρακτηριστικά της.
- ✓ Τον νόμο της τριβής ολίσθησης.
- ✓ Τον ρόλο της τριβής στην καθημερινή ζωή.
- ✓ Τη στατική τριβή.
- ✓ Την οριακή τριβή.

ΘΕΩΡΙΑ

1.1 Τι γνωρίζετε για την τριβή ολίσθησης;

Απάντηση

Αν σε ένα σώμα που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο δώσουμε μια ταχύτητα $\vec{v}_0$ και το αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί, θα παρατηρήσουμε ότι, αφού διανύσει κάποια απόσταση, θα σταματήσει να κινείται. Αυτό σημαίνει ότι στον άξονα της κίνησης ασκήθηκε στο σώμα κάποια δύναμη, η οποία είχε φορά αντίθετη από τη φορά της κίνησης και το ανάγκασε να σταματήσει. Η δύναμη αυτή ονομάζεται **τριβή ολίσθησης** και συμβολίζεται με $\vec{T}$.



Τριβή ολίσθησης ονομάζεται η δύναμη η οποία ασκείται σε ένα σώμα που ολισθαίνει (γλιστράει) πάνω σε μια τραχιά επιφάνεια και η οποία αντιστέκεται στην κίνησή του.

⚠ Παρατηρήσεις

1. Η τριβή ολίσθησης ανήκει στις δυνάμεις επαφής και οφείλεται στην επαφή του σώματος με μια επιφάνεια.
2. Τριβή εμφανίζεται και όταν ένα σώμα κινείται μέσα σε ένα ρευστό (δηλαδή στον αέρα ή σε υγρό). Στην περίπτωση αυτή, αντί για τριβή μιλάμε για αντίσταση.

1.2 Να διατυπώσετε τον νόμο της τριβής ολίσθησης.**Απάντηση**

Από απλά πειράματα που πραγματοποιήθηκαν διαπιστώθηκε ότι η τριβή ολίσθησης:

1. είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν των τριβόμενων επιφανειών.
2. είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα του ενός σώματος ως προς το άλλο.
3. είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης $\vec{N}$ που δέχεται το σώμα από την επιφάνεια με την οποία βρίσκεται σε επαφή.
4. εξαρτάται από το είδος των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή. Η εξάρτηση της τριβής ολίσθησης από τη φύση των επιφανειών που είναι σε επαφή εκφράζεται με έναν αδιάστατο συντελεστή αναλογίας μ , ο οποίος ονομάζεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**.

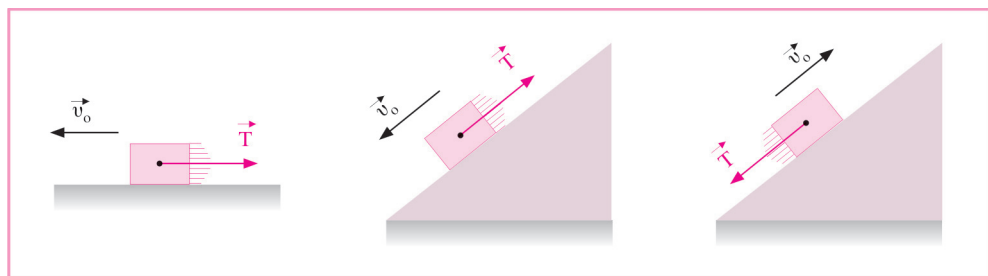
Τα παραπάνω συμπεράσματα αποτελούν τον νόμο της τριβής ολίσθησης, ο οποίος μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση:

$$T = \mu N$$

1.3 Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της τριβής ολίσθησης;**Απάντηση**

Τα χαρακτηριστικά της τριβής ολίσθησης είναι:

- σημείο εφαρμογής το σημείο επαφής των τριβόμενων επιφανειών.
- διεύθυνση παράλληλη στα σημεία επαφής των τριβόμενων επιφανειών.
- φορά πάντοτε αντίθετη από τη φορά κίνησης του σώματος.
- μέτρο που υπολογίζεται από τη σχέση $T = \mu N$, όπου μ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης και N το μέτρο της κάθετης δύναμης που δέχεται το σώμα από την επιφάνεια.

Παραδείγματα σχεδιασμού της τριβής ολίσθησης**1.4** Από ποια σχέση υπολογίζεται η τριβή ολίσθησης κατά την κίνηση ενός σώματος σε οριζόντιο επίπεδο ή σε κεκλιμένο επίπεδο;

Απάντηση

Επειδή η τριβή ολίσθησης έχει τύπο $T = \mu N$, για τον υπολογισμό της θα πρέπει σε κάθε περίπτωση να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$. Ο υπολογισμός του μέτρου της δύναμης $\vec{N}$ γίνεται επιλέγοντας αρχικά κάθετους άξονες xx' και yy' και εφαρμόζοντας τη συνθήκη $\Sigma F_y = 0$ στον κατακόρυφο άξονα (εκεί όπου εμφανίζεται και η δύναμη $\vec{N}$).

- **Κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$**

Στην περίπτωση αυτή, στον κατακόρυφο άξονα εμφανίζονται μόνο οι δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$, οπότε από τη συνθήκη $\Sigma F_y = 0$ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg$$

Επομένως για την τριβή ολίσθησης ισχύει:

$$T = \mu N \Rightarrow T = \mu mg$$

- **Κίνηση σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση δύναμης $\vec{F}$ που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο**

Στην περίπτωση αυτή, πρέπει αρχικά να αναλύσουμε τη δύναμη $\vec{F}$ στις συνιστώσες της $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$. Ισχύουν: $F_x = F \sin \varphi$ και $F_y = F \cos \varphi$. Τώρα στον κατακόρυφο άξονα, εκτός από τις δυνάμεις $\vec{B}$ και $\vec{N}$ εμφανίζεται και η συνιστώσα $\vec{F}_y$, οπότε από τη συνθήκη $\Sigma F_y = 0$ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_y = B \Rightarrow N = mg - F \cos \varphi$$

Επομένως για την τριβή ολίσθησης ισχύει: $T = \mu N \Rightarrow T = \mu (mg - F \cos \varphi)$.

- **Κίνηση σε κεκλιμένο επίπεδο με την επίδραση μόνο του βάρους του σώματος**

Στην περίπτωση αυτή, πρέπει αρχικά να αναλύσουμε τη δύναμη του βάρους $\vec{B}$ στις συνιστώσες της $\vec{B}_x$ και $\vec{B}_y$. Ισχύουν:

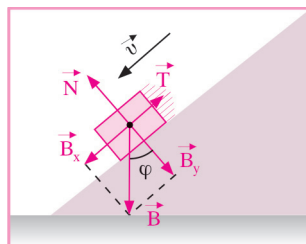
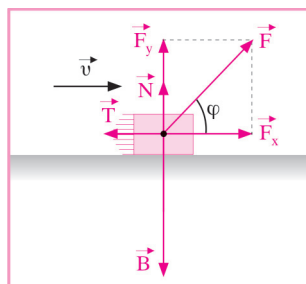
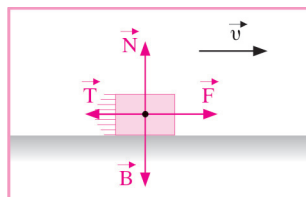
$$B_x = B \sin \varphi \quad \text{και} \quad B_y = B \cos \varphi$$

Στον κατακόρυφο άξονα εμφανίζονται οι δυνάμεις $\vec{B}_y$ και $\vec{N}$, οπότε από τη συνθήκη $\Sigma F_y = 0$ προκύπτει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = mg \cos \varphi$$

Επομένως για την τριβή ολίσθησης ισχύει:

$$T = \mu N \Rightarrow T = \mu mg \cos \varphi$$

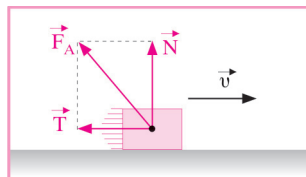


⚠ Παρατήρηση

Η τριβή ολίσθησης δεν είναι η μόνη δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα από την επιφάνεια με την οποία βρίσκεται σε επαφή. Στο σώμα ασκείται και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$, οπότε η συνολική δύναμη $\vec{F}_A$ που ασκείται στο σώμα από την επιφάνεια με την οποία βρίσκεται σε επαφή προσδιορίζεται με τη βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμμου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για τον υπολογισμό του μέτρου της εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα. Θα είναι:

$$F_A = \sqrt{T^2 + N^2}$$

Ο προσδιορισμός της κατεύθυνσης της δύναμης $\vec{F}_A$ πραγματοποιείται μέσω του υπολογισμού της εφαπτομένης της γωνίας που σχηματίζει η δύναμη αυτή με τον άξονα της κίνησης (ή με τον κατακόρυφο άξονα).



1.5 Ποιος είναι ο ρόλος της τριβής στην καθημερινή ζωή;

Απάντηση

Από όσα αναφέραμε ως τώρα, δίνεται ίσως η εντύπωση ότι η τριβή είναι μια ανεπιθύμητη δύναμη. Όμως, σε πολλές περιπτώσεις η τριβή είναι μια χρήσιμη δύναμη και χωρίς την ύπαρξή της δεν είναι δυνατόν να πραγματοποιηθούν αρκετά φυσικά φαινόμενα.

Παραδείγματα

1. Χωρίς την τριβή δε θα μπορούσαμε να κρατήσουμε τα διάφορα αντικείμενα στα χέρια μας. Αν προσπαθήσουμε να πιάσουμε ένα μπουκάλι που έχει λαδωθεί, θα δυσκολευτούμε. Αυτό συμβαίνει γιατί η τριβή μεταξύ του χεριού μας και του μπουκαλιού είναι μικρή.
2. Χωρίς την τριβή δε θα μπορούσαμε να περπατήσουμε ή να σταματήσουμε. Αν προσπαθήσουμε να περπατήσουμε ή να σταματήσουμε σε έναν παγωμένο δρόμο, θα είναι δύσκολο, αφού η τριβή μεταξύ των ποδιών μας και του παγωμένου δρόμου είναι μικρή. Το ίδιο ισχύει και για την κίνηση των οχημάτων στον δρόμο.



Στις περιπτώσεις όπου η τριβή είναι ανεπιθύμητη δύναμη προσπαθούμε με διάφορους τρόπους να τη μεταβάλλουμε μειώνοντάς την ή αυξάνοντάς την.

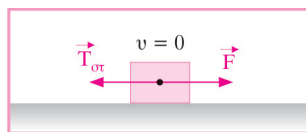
Παράδειγματα

1. Στις μηχανές των αυτοκινήτων χρησιμοποιούμε λιπαντικά για να μειωθούν οι τριβές και επομένως και οι φθορές της μηχανής.
2. Σε έναν δρόμο όπου έχουν χυθεί λάδια ρίχνουμε پرioniدي για να αυξηθεί η τριβή και να είναι ασφαλής η οδήγηση.
3. Τα χόβερκραφτ στη θάλασσα κινούνται πάνω σε ένα λεπτό στρώμα αέρα, με τη βοήθεια του οποίου επιτυγχάνεται σημαντική ελάττωση της αντίστασης.

1.6 Τι γνωρίζετε για τη στατική τριβή;

Απάντηση

Σε ένα σώμα που βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Παρατηρούμε ότι το σώμα παραμένει ακίνητο. Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται είναι ίση με το μηδέν. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$ να ασκείται στο σώμα και κάποια άλλη δύναμη που θα είναι αντίθετη της δύναμης $\vec{F}$. Η δύναμη αυτή είναι η **στατική τριβή** και συμβολίζεται με $\vec{T}_{\text{στ}}$.



Στατική τριβή ονομάζεται η δύναμη της τριβής που δέχεται ένα σώμα από μια επιφάνεια και η οποία εμφανίζεται όταν στο σώμα ασκείται κάποια δύναμη ικανή να το θέσει σε κίνηση αλλά το σώμα τελικά δεν κινείται.

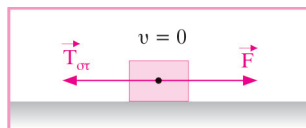
1.7 Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της στατικής τριβής;

Απάντηση

Τα χαρακτηριστικά της στατικής τριβής είναι:

- κατεύθυνση αντίθετη από την κατεύθυνση της δύναμης που προσπαθεί να κινήσει το σώμα.
- μέτρο το οποίο δεν είναι σταθερό και καθορίζεται κάθε φορά από τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, οι οποίες προσπαθούν να το θέσουν σε κίνηση.

Στο παράδειγμα της προηγούμενης ερώτησης αυξάνουμε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκούμε στο σώμα, οπότε παρατηρούμε ότι το σώμα εξακολουθεί να παραμένει ακίνητο. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο της στατικής τριβής αυξήθηκε, έτσι ώστε να εξακολουθεί να παραμένει ίδιο με το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.



1.8 Τι γνωρίζετε για την οριακή τριβή; Πώς υπολογίζεται;**Απάντηση**

Αυξάνοντας συνεχώς το μέτρο της οριζόντιας δύναμης, θα παρατηρήσουμε ότι για κάποια τιμή της το σώμα είναι έτοιμο να κινηθεί. Στην περίπτωση αυτή, η στατική τριβή που δέχεται το σώμα είναι μέγιστη, ονομάζεται **οριακή τριβή** και συμβολίζεται με $\vec{T}_{\sigma\tau, \max}$.

Οριακή τριβή ονομάζεται η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.

Η οριακή τριβή υπολογίζεται από τον τύπο:

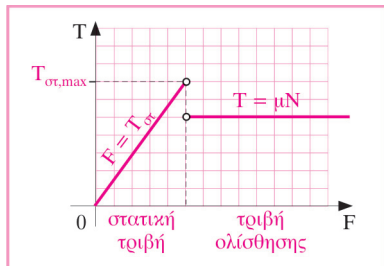
$$T_{\sigma\tau, \max} = \mu_{\sigma\tau} N$$

όπου $\mu_{\sigma\tau}$ ο συντελεστής στατικής τριβής και N το μέτρο της κάθετης δύναμης που δέχεται το σώμα από την επιφάνεια.

Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι καθαρός αριθμός και εξαρτάται από τη φύση των δύο επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.

⚠ Παρατηρήσεις

1. Αν το μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ αυξηθεί κι άλλο, το σώμα θα αρχίσει να κινείται, οπότε σε αυτό δε θα ασκείται πλέον στατική τριβή αλλά τριβή ολίσθησης.
2. Όπως είδαμε, η στατική τριβή είναι δύναμη μεταβλητού μέτρου. Επειδή η οριακή τριβή είναι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, το μέτρο της στατικής τριβής κυμαίνεται από μηδέν έως $T_{\sigma\tau, \max}$, δηλαδή $0 \leq T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau, \max}$ ή $0 \leq T_{\sigma\tau} \leq \mu_{\sigma\tau} N$.
3. Για να θέσουμε σε κίνηση ένα σώμα, χρειάζεται να ασκήσουμε μεγαλύτερη δύναμη σε σύγκριση με τη δύναμη που απαιτείται προκειμένου να συντηρήσουμε την κίνησή του. Αυτό σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής ($T_{\sigma\tau, \max} = \mu_{\sigma\tau} N$) είναι λίγο μεγαλύτερη από την τριβή ολίσθησης ($T = \mu N$) και κατά συνέπεια ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ δύο επιφανειών είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο συντελεστή τριβής ολίσθησης ($\mu_{\sigma\tau} > \mu$). Σε αρκετές όμως περιπτώσεις θεωρούμε ότι οι δύο αυτοί συντελεστές είναι ίδιοι.
4. Στο διάγραμμα του διπλανού σχήματος μπορούμε να δούμε πώς μεταβάλλεται το μέτρο της τριβής (στατικής, οριακής και ολίσθησης) σε σχέση με το μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται σε ένα σώμα το οποίο αρχικά είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο.

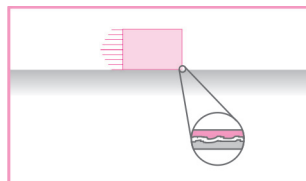


1.9 Ποια είναι η αιτία δημιουργίας τριβής ανάμεσα σε δύο σώματα που έρχονται σε επαφή;

Απάντηση

Εξετάζοντας με γυμνό μάτι τις επιφάνειες των σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή, θα παρατηρήσουμε ότι φαίνονται λείες.

Με τη χρήση όμως μεγεθυντικού φακού ή μικροσκοπίου θα παρατηρήσουμε ότι οι επιφάνειες των σωμάτων που βρίσκονται σε επαφή δεν είναι απόλυτα λείες. Σε κάθε επιφάνεια διακρίνονται ανωμαλίες (κοιλότητες και προεξοχές).



Όταν λοιπόν τα δύο σώματα έρθουν σε επαφή, οι κοιλότητες και οι προεξοχές περιπλέκονται μεταξύ τους. Στα σημεία επαφής δημιουργείται ένα είδος συγκόλλησης, που προκαλείται από τις ελκτικές δυνάμεις που εμφανίζονται μεταξύ των μορίων (ατόμων) των δύο σωμάτων εξαιτίας της μικρής απόστασης στην οποία έρχονται. Για να μπορέσει να κινηθεί το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο, θα πρέπει να «σπάσουν», με την εφαρμογή κατάλληλης δύναμης, οι δεσμοί που αναπτύσσονται. Η αντίδραση που εμφανίζεται σε αυτή τη δύναμη είναι η τριβή.

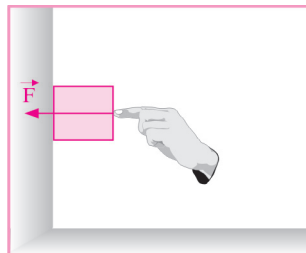
ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σχόλιο: Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τις ευθύγραμμες κινήσεις σωμάτων που πραγματοποιούνται σε οριζόντιο επίπεδο και με την επίδραση οριζόντιων δυνάμεων. Με τις κινήσεις σωμάτων σε κεκλιμένο επίπεδο ή σε οριζόντιο επίπεδο που πραγματοποιούνται με την επίδραση δυνάμεων οι οποίες σχηματίζουν γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο θα ασχοληθούμε σε επόμενη ενότητα.

1.10 1η εφαρμογή

Σκοπός: Μελέτη της στατικής τριβής.

Να βρείτε ποιο είναι το μέτρο της ελάχιστης οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκείται στον κύβο του διπλανού σχήματος μάζας $m = 10 \text{ kg}$, ώστε μόλις που να συγκρατείται σε έναν κατακόρυφο τοίχο. Δίνονται ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τοίχου και κύβου $\mu_{\text{στ}} = 0,2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Λύση

Σχόλιο: Όταν σε ένα σώμα που βρίσκεται σε επαφή με κάποια επιφάνεια ασκείται κάποια δύναμη ικανή να το θέσει σε κίνηση αλλά αυτό παραμένει ακίνητο, τότε μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας εμφανίζεται στατική τριβή. Σχεδιάστε ένα κατάλληλο σχήμα όπου θα φαίνονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και εφαρμόστε τους νόμους του Νεύτωνα. Για διευκόλυνσή μας, όλες οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα θεωρούμε ότι έχουν κοινό σημείο εφαρμογής. Με αυτό το σκεπτικό θα σχεδιάζουμε από δω και στο εξής τις δυνάμεις.

Στον κύβο που βρίσκεται ακίνητος και σε επαφή με τον κατακόρυφο τοίχο ασκούνται η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τον τοίχο, το βάρος του $\vec{B}$ και η στατική τριβή $\vec{T}_{στ}$.

Σε κάθε άξονα ισχύει:

Στον άξονα x: Ο κύβος ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}$ και $\vec{N}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = N \quad (1)$$

Στον άξονα y: Ο κύβος ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{T}_{στ}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{στ} = B \Rightarrow T_{στ} = mg \Rightarrow T_{στ} = (10 \cdot 10) \text{ N} = 100 \text{ N}$$

Για τη στατική τριβή $\vec{T}_{στ}$ και εφόσον ο κύβος μόλις που ισορροπεί, ισχύει:

$$T_{στ} = T_{στ, \max} = \mu_{στ} N$$

Άρα η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ θα έχει μέτρο $N = \frac{T_{στ}}{\mu_{στ}} = \frac{100}{0,2} \text{ N} = 500 \text{ N}$. Επομένως,

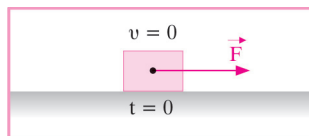
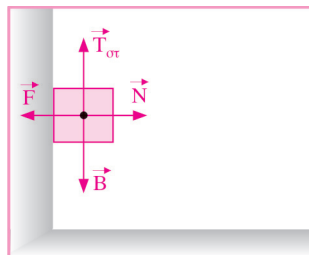
σύμφωνα με τη σχέση (1), το μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκείται είναι $F = 500 \text{ N}$.

1.11 2η εφαρμογή

Σκοπός: Ταυτόχρονη μελέτη στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης.

Ένα σώμα μάζας $m = 7 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 28 \text{ N}$. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στο σώμα και στο επίπεδο είναι $\mu_{στ} = 0,35$.

α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα μπορέσει να κινηθεί με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$.



β. Να προσδιορίσετε την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα και τον χρόνο που χρειάζεται για να καλύψει απόσταση 18 m.

Δίνονται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu = 0,3$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

Σχόλιο: Για να μπορέσει να κινηθεί ένα σώμα, θα πρέπει η δύναμη που του ασκείται να είναι μεγαλύτερη από τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής. Όταν το σώμα κινείται, θα του ασκείται η τριβή ολίσθησης.

α. Όταν το σώμα είναι ακίνητο και ασκηθεί η δύναμη $\vec{F}$, για να μπορέσει να κινηθεί το σώμα, θα πρέπει το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ να είναι μεγαλύτερο από τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής $\vec{T}_{\text{στ,max}}$. Δηλαδή $F > T_{\text{στ,max}}$.

Εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$, στο σώμα ασκούνται το βάρος $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$.

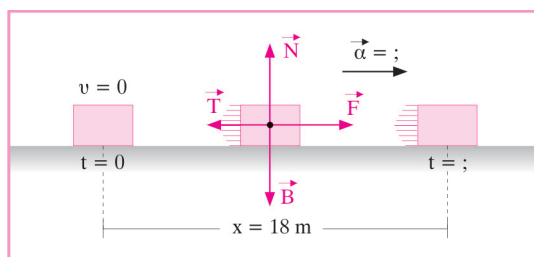
Στον άξονα y το σώμα ισορροπεί. Επομένως, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg \Rightarrow N = (7 \cdot 10) \text{ N} = 70 \text{ N}$.

Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής $T_{\text{στ,max}}$ έχει μέτρο:

$$T_{\text{στ,max}} = \mu_{\text{στ}} N = (0,35 \cdot 70) \text{ N} = 24,5 \text{ N}$$

Αφού λοιπόν $F = 28 \text{ N} > T_{\text{στ,max}} = 24,5 \text{ N}$, συμπεραίνουμε ότι το σώμα θα μπορέσει να κινηθεί.

β. Όταν το σώμα αρχίζει να κινείται, σε κάθε άξονα θα ισχύει:



Στον άξονα x: Στο σώμα ασκούνται οι σταθερές δυνάμεις $F = 28 \text{ N}$ και η τριβή ολίσθησης $T = \mu N$. Το σώμα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Άρα, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow a = \frac{F - T}{m} \quad (1)$$

Στον άξονα y: Το σώμα ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg \Rightarrow N = (7 \cdot 10) \text{ N} = 70 \text{ N}$$

Επομένως το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι $T = \mu N = (0,3 \cdot 70) \text{ N} = 21 \text{ N}$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), η επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα είναι $a = \frac{F - T}{m} = \frac{28 - 21}{7} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2$. Αφού το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, θα ισχύει: $x = \frac{1}{2}at^2$. Ο χρόνος που απαιτείται για να μετατοπιστεί το σώμα κατά 18 m θα είναι $x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 18}{1}} \text{ s} = 6 \text{ s}$.

1.12 3η εφαρμογή

Σκοπός: Μελέτη της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης με την ύπαρξη τριβής.

Κατά τη διάρκεια μιας μετακόμισης ένας εργάτης σπρώχνει ένα κασόνι γεμάτο με ρούχα μάζας $m = 80 \text{ kg}$ σε οριζόντιο πάτωμα με σταθερή ταχύτητα, ασκώντας σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 100 \text{ N}$.

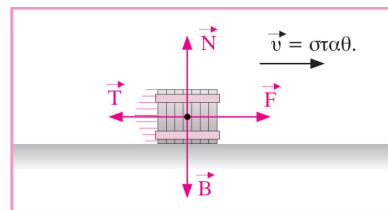
- Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ κασονιού και πατώματος.
- Αν από το κασόνι βγουν μερικά πράγματα, έτσι ώστε η μάζα του κασονιού να γίνει ίση με $m_1 = 50 \text{ kg}$, να βρείτε τη σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ που πρέπει να ασκείται στο κασόνι για να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

Σχόλιο: Όταν ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα της κίνησης να είναι ίση με το μηδέν.

- Στο κασόνι που κινείται με σταθερή ταχύτητα ασκούνται η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το πάτωμα, το βάρος του $\vec{B}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$. Σε κάθε άξονα ισχύει:



Στον άξονα x: Το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{F}$ και $\vec{T}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T = F = 100 \text{ N} \quad (1)$$

Στον άξονα y: Το σώμα ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg \Rightarrow N = (80 \cdot 10) \text{ N} = 800 \text{ N}$$

Για την τριβή ολίσθησης ισχύει $T = \mu N$, οπότε ο συντελεστής τριβής ολίσθη-

$$\text{σης θα είναι } \mu = \frac{T}{N} = \frac{100 \text{ N}}{800 \text{ N}} = 0,125.$$

- β. Όταν από το κασόνι βγουν μερικά πράγματα, αλλάζει το μέτρο της κάθετης δύναμης και επομένως και η τριβή. Στο σώμα ασκούνται οι ίδιες δυνάμεις και ισχύουν οι ίδιες συνθήκες. Όμως:

$$\text{Στον άξονα } y: \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = B_1 \Rightarrow N_1 = m_1 g \Rightarrow N = (50 \cdot 10) \text{ N} = 500 \text{ N}.$$

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης δεν αλλάζει, γιατί δεν αλλάζουν οι επιφάνειες επαφής των δύο σωμάτων. Όμως, η τριβή ολίσθησης θα γίνει:

$$T_1 = \mu N_1 = (0,125 \cdot 500) \text{ N} = 62,5 \text{ N}$$

Άρα στον άξονα x θα ισχύει:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_1 = T_1 = 62,5 \text{ N}$$

Η δύναμη $F_1 = 62,5 \text{ N}$ είναι η σταθερή οριζόντια δύναμη που θα πρέπει να ασκείται τώρα στο σώμα για να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

1.13 4η εφαρμογή

Σκοπός: Μελέτη της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με την ύπαρξη τριβής.

Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Κάποια χρονική στιγμή ($t = 0$) στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 12 \text{ N}$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του δαπέδου είναι $\mu = 0,2$, να βρείτε:

- την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα.
- την ταχύτητα που θα αποκτήσει τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$.
- πόσο μετατοπίζεται το σώμα σε χρόνο 8 s .

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

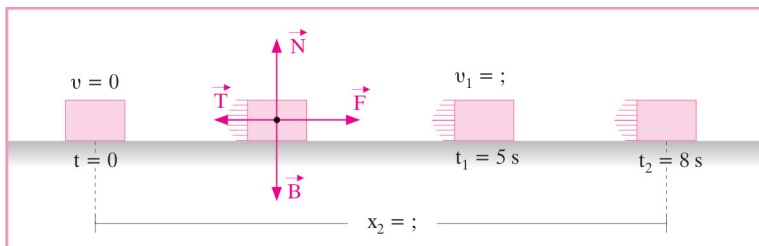
Λύση

Μεθοδολογία: Ο τρόπος που ακολουθούμε για την επίλυση ασκήσεων με τους νόμους του Νεύτωνα έχει ήδη αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα στον Α' τόμο. Θυμίζουμε τα βασικά βήματα:

- Σχεδιάζουμε κατάλληλο σχήμα όπου φαίνονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.
- Εφαρμόζουμε σε κάθε άξονα τους νόμους του Νεύτωνα.
- Αναγνωρίζουμε το είδος της κίνησης και εφαρμόζουμε, αν χρειαστεί, κατάλληλη σχέση για την ταχύτητα και τη μετατόπιση του σώματος.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν από την εφαρμογή των νόμων δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του σώματος, δουλεύουμε αντίστροφα. Δηλαδή βρίσκουμε την επιτάχυνση από τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας ή της μετατόπισης για την αντίστοιχη κίνηση και μετά εφαρμόζουμε τους νόμους του Νεύτωνα.

- α. Στο σώμα ασκούνται η δύναμη $\vec{F}$, η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το οριζόντιο δάπεδο. Ισχύει:



Στον άξονα x: Στο σώμα ασκούνται οι σταθερές δυνάμεις $F = 12 \text{ N}$ και η τριβή $T = \mu N = \mu mg = (0,2 \cdot 2 \cdot 10) \text{ N} = 4 \text{ N}$. Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Άρα, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow a = \frac{F - T}{m} = \frac{12 \text{ N} - 4 \text{ N}}{2 \text{ kg}} = 4 \text{ m/s}^2$$

- β. Αφού το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, θα ισχύει: $v = at$. Επομένως η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ s}$ θα είναι $v_1 = at_1 = (4 \cdot 5) \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$.
- γ. Αφού το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, θα ισχύει: $x = \frac{1}{2}at^2$. Επομένως η μετατόπιση του σώματος σε χρόνο 8 s είναι $x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8^2\right) \text{ m} = 128 \text{ m}$.

1.14 5η εφαρμογή

Σκοπός: Μελέτη της ευθύγραμμης ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης με την ύπαρξη τριβής.

Ένα αυτοκίνητο μάζας 800 kg κινείται σε οριζόντιο δρόμο με ταχύτητα $v_0 = 108 \text{ km/h}$. Κάποια στιγμή ο οδηγός αντιλαμβάνεται σε απόσταση 150 m το φανάρι που είναι κόκκινο και φρενάρει, οπότε σταματάει ακριβώς μπροστά στο φανάρι. Να βρείτε:

- το μέτρο της επιβράδυνσης του αυτοκινήτου.
- την τριβή ολίσθησης που αναπτύσσεται.

γ. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης που αναπτύσσεται μεταξύ των τροχών του αυτοκινήτου και του δρόμου.

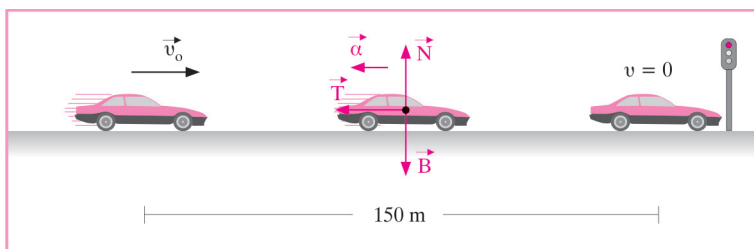
Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$. Θεωρήστε ότι κατά τη διάρκεια του φρεναρίσματος οι τροχοί δεν κυλάνε, αλλά ολισθαίνουν πάνω στον δρόμο.

Λύση

Σχόλιο: Όταν ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_0$, δε σημαίνει ότι ασκείται σε αυτό κάποια δύναμη $\vec{F}$. Δύναμη $\vec{F}$ δε βάζουμε ποτέ σε μια άσκηση, εκτός και αν μας το αναφέρει ξεκάθαρα η εκφώνηση. Μην μπερδευτείτε λοιπόν. Εφαρμόστε τη μεθοδολογία της προηγούμενης άσκησης. Προσέξτε ότι σε αυτή την άσκηση θα πρέπει να δουλέψετε αντίστροφα, δηλαδή να βρείτε το μέτρο της επιβράδυνσης από τις εξισώσεις για την κίνηση του σώματος και μετά να εφαρμόσετε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

α. Το αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε

$$\text{ισχύει (με απόδειξη): } x = \frac{v_0^2}{2a}, \text{ όπου } v_0 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \cdot \frac{1.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 30 \text{ m/s.}$$



Όταν το αυτοκίνητο σταματήσει, θα έχει μετατοπιστεί κατά $x = 150 \text{ m}$. Άρα το μέτρο της επιβράδυνσης του αυτοκινήτου θα είναι:

$$x = \frac{v_0^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2x} = \frac{30^2}{2 \cdot 150} \text{ m/s}^2 = 3 \text{ m/s}^2$$

β. Στο αυτοκίνητο, κατά τη διάρκεια του φρεναρίσματος, ασκούνται η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από τον δρόμο.

Στον άξονα x , στο αυτοκίνητο ασκείται η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$. Άρα, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow T = ma = (800 \cdot 3) \text{ N} = 2.400 \text{ N}$$

γ. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης θα προκύψει από τη σχέση:

$$T = \mu N \quad (1)$$

επιλύοντας ως προς μ .

Στον άξονα y , το αυτοκίνητο ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg = (800 \cdot 10) \text{ N} = 8.000 \text{ N}$$

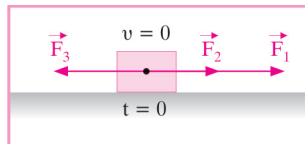
Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), προκύπτει:

$$T = \mu N \Rightarrow \mu = \frac{T}{N} = \frac{2.400 \text{ N}}{8.000 \text{ N}} \Rightarrow \mu = 0,3$$

1.15 6η εφαρμογή

Σκοπός: Μελέτη της κίνησης ενός σώματος με την επίδραση πολλών δυνάμεων.

Σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ ασκούνται τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι οριζόντιες δυνάμεις $F_1 = 20 \text{ N}$, $F_2 = 10 \text{ N}$ και $F_3 = 12 \text{ N}$ που φαίνονται στο σχήμα. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,5$, να βρείτε:



- το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία θα κινηθεί το σώμα.
- την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$.
- τη μετατόπιση του σώματος κατά τη διάρκεια των δύο πρώτων δευτερολέπτων της κίνησής του.
- το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το δάπεδο κατά τη διάρκεια της κίνησής του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

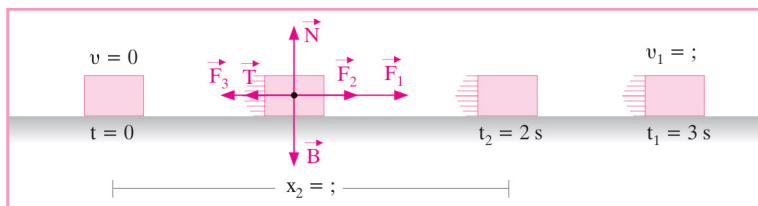
Σχόλιο: Εφαρμόστε τη μεθοδολογία που αναφέρθηκε στις προηγούμενες ασκήσεις. Η μόνη διαφορά είναι ότι στον άξονα της κίνησης ασκούνται περισσότερες δυνάμεις.

⚠ Σημαντική παρατήρηση

Όταν σας ζητούν να υπολογίσετε τη δύναμη που δέχεται το σώμα από το δάπεδο, μην μπερδευτείτε και υπολογίσετε μόνο την τριβή ολίσθησης $\vec{T}$. Στο σώμα ασκείται από το δάπεδο και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$, οπότε η συνολική δύναμη $\vec{F}_A$ που του ασκείται θα προσδιοριστεί με τη βοήθεια του κανόνα του παραλληλογράμμου και του πυθαγόρειου θεωρήματος.

- Η τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα είναι:

$$T = \mu N = \mu mg = (0,5 \cdot 2 \cdot 10) \text{ N} = 10 \text{ N}$$



Η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο:

$$\Sigma F = F_1 + F_2 - F_3 - T = 20 \text{ N} + 10 \text{ N} - 12 \text{ N} - 10 \text{ N} = 8 \text{ N}$$

οπότε, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, το σώμα αποκτά επιτά-

$$\chiυνση \text{ μέτρου } \Sigma F = ma \Rightarrow a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{8}{2} \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2.$$

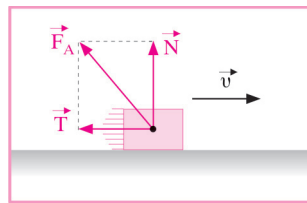
- β. Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Ισχύει: $v = at$. Αντικαθιστώντας $t_1 = 3 \text{ s}$, προκύπτει $v_1 = at_1 = (4 \cdot 3) \text{ m/s} = 12 \text{ m/s}$.

- γ. Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Ισχύει: $x = \frac{1}{2} at^2$.

Αντικαθιστώντας $t_2 = 2 \text{ s}$, προκύπτει η ζητούμενη μετατόπιση. Είναι:

$$x_2 = \frac{1}{2} at_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2^2 \right) \text{ m} = 8 \text{ m}$$

- δ. Στο σώμα ασκούνται από το δάπεδο η τριβή ολίσθησης $T = 10 \text{ N}$ και η κάθετη δύναμη $N = 20 \text{ N}$ (αφού στον κατακόρυφο άξονα έχουμε $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \Rightarrow N = B = mg = 20 \text{ N}$). Η συνολική δύναμη $\vec{F}_A$ που δέχεται το σώμα από το δάπεδο φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το μέτρο της προσδιορίζεται με τη βοήθεια του πυθαγόρειου θεωρήματος. Είναι:



$$F_A = \sqrt{T^2 + N^2} = \sqrt{(10 \text{ N})^2 + (20 \text{ N})^2} = 10\sqrt{5} \text{ N}$$

1.16 7η εφαρμογή

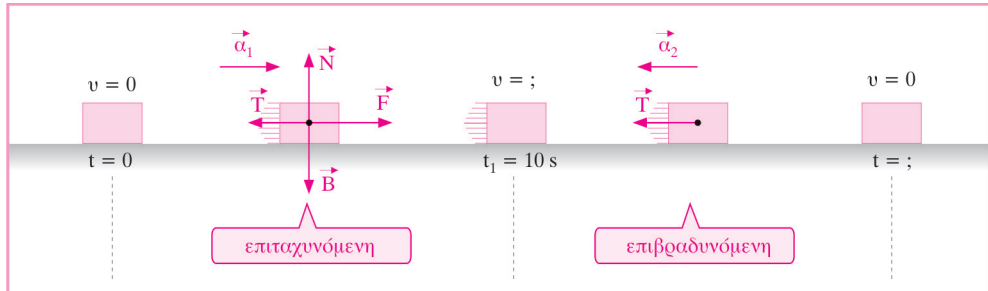
Σκοπός: Μελέτη των διαδοχικών κινήσεων με την ύπαρξη της τριβής.

Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 10 \text{ N}$. Η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα μετά από χρόνο $t_1 = 10 \text{ s}$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,2$, να βρείτε τη συνολική μετατόπιση του σώματος μέχρι να σταματήσει. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

Σχόλιο: Στις ασκήσεις με διαδοχικές κινήσεις θυμηθείτε ότι η τελική ταχύτητα της προηγούμενης κίνησης είναι η αρχική της επόμενης. Προσέξτε να μη χρησιμοποιήσετε στοιχεία που θα προσδιορίσετε στη μία κίνηση ως στοιχεία της άλλης κίνησης (για παράδειγμα, η επιτάχυνση δεν είναι ίδια για κάθε κίνηση). Αναγνωρίστε τα είδη των κινήσεων που εκτελεί το σώμα και δουλέψτε ανεξάρτητα για κάθε κίνηση.

Το σώμα από 0 έως 10 s εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με την επίδραση της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής ολίσθησης $\vec{T}$.



Από 10 s - t το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, καθώς στο σώμα ασκείται μόνο η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$.

Εξετάζουμε κάθε κίνηση χωριστά.

1η κίνηση

Στο σώμα ασκούνται η δύναμη $\vec{F}$, η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$. Σε κάθε άξονα ισχύει:

Στον άξονα x: Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Άρα, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_x = ma_1 \Rightarrow F - T = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F - T}{m} \quad (1)$$

Στον άξονα y: Το σώμα ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg \Rightarrow N = (2 \cdot 10) \text{ N} = 20 \text{ N}$$

Για την τριβή ολίσθησης ισχύει:

$$T = \mu N = (0,2 \cdot 20) \text{ N} = 4 \text{ N}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), προκύπτει για την επιτάχυνση του σώματος:

$$a_1 = \frac{F - T}{m} = \frac{10 - 4}{2} \text{ m/s}^2 = 3 \text{ m/s}^2$$

Αφού το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, θα ισχύει: $v = a_1 t$. Επομένως η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ θα είναι $v = (3 \cdot 10) \text{ m/s} = 30 \text{ m/s}$.

Επίσης για τη μετατόπισή του ισχύει: $x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2$. Επομένως για τον χρόνο των 10 s θα είναι:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^2 \right) \text{ m} = 150 \text{ m}$$

2η κίνηση

Στο σώμα ασκούνται η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, το βάρος του $\vec{B}$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$. Σε κάθε άξονα ισχύει:

Στον άξονα x: Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με την επίδραση της τριβής ολίσθησης $T = 4 \text{ N}$. Άρα, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για το μέτρο της επιβράδυνσής του θα είναι:

$$\Sigma F_x = ma_2 \Rightarrow T = ma_2 \Rightarrow a_2 = \frac{T}{m} = \frac{4}{2} \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2$$

Στον άξονα y: Το σώμα ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg \Rightarrow N = (2 \cdot 10) \text{ N} = 20 \text{ N}$$

Αφού το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, θα ισχύει: $v = v_0 - a_2 t$. Η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι όση είναι η τελική ταχύτητα της προηγούμενης κίνησης, δηλαδή $v_0 = 30 \text{ m/s}$.

Όταν λοιπόν το αυτοκίνητο σταματήσει μετά από χρόνο t_2 που θα διαρκέσει η δεύτερη κίνηση, θα είναι $v = 0$. Άρα $0 = v_0 - a_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{30}{2} \text{ s} = 15 \text{ s}$.

Επίσης, στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύει: $x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$.

Επομένως η μετατόπιση x_2 του σώματος στη δεύτερη κίνηση μέχρι να σταματήσει (για χρόνο 15 s) θα είναι $x_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \left(30 \cdot 15 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15^2 \right) \text{ m} = 225 \text{ m}$.

Άρα η συνολική μετατόπιση $x_{\text{ολ}}$ του σώματος για όλη τη διάρκεια της κίνησής του θα είναι $x_{\text{ολ}} = x_1 + x_2 = 150 \text{ m} + 225 \text{ m} = 375 \text{ m}$.

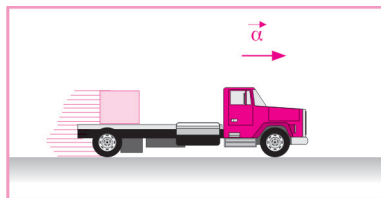
1.17 8η εφαρμογή

Σκοπός: Μελέτη της κίνησης συστήματος σωμάτων με την ύπαρξη τριβής.

Ένα κιβώτιο βρίσκεται στην καρότσα ενός φορτηγού με την οποία παρουσιάζει συντελεστή στατικής τριβής $\mu_{\text{στ}} = 0,6$.

α. Να βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αναπτύξει το φορτηγό χωρίς να κινηθεί το κιβώτιο.

β. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των τροχών του φορτηγού και του δρόμου είναι $\mu = 0,2$, να βρείτε τη δύναμη που κινεί το φορτηγό, όταν αυτό κινείται με την παραπάνω επιτάχυνση.



Δίνονται η μάζα του φορτηγού $M = 1.000 \text{ kg}$, η μάζα του κιβωτίου $m = 50 \text{ kg}$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

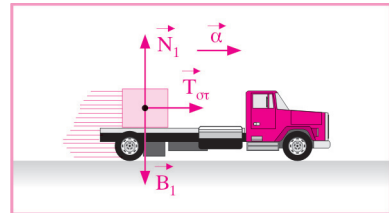
Λύση

Σχόλιο: Όταν πρόκειται να μελετήσουμε την κίνηση ενός συστήματος σωμάτων, μπορούμε είτε να εξετάσουμε χωριστά κάθε σώμα είτε να εξετάσουμε συνολικά το σύστημα.

⚠ Σημαντική παρατήρηση

Για να μην κινείται ένα σώμα στο οποίο ασκείται κάποια δύναμη «ικανή» να το κινήσει, θα πρέπει η στατική τριβή που του ασκείται να είναι μικρότερη (ή το πολύ ίση) με την οριακή τριβή. Δηλαδή πρέπει $T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau, \max} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \leq \mu_{\sigma\tau} N$.

- α. Έστω a το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης που μπορεί να αναπτύξει το φορτηγό. Με την ίδια επιτάχυνση θα κινηθεί και το κιβώτιο που βρίσκεται στην καρότσα του φορτηγού.



Στο κιβώτιο ασκούνται η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$, το βάρος του $\vec{B}_1$ και η κάθετη δύναμη $\vec{N}_1$ από την καρότσα του φορτηγού. Σε κάθε άξονα ισχύει:

Στον άξονα x: Η μόνη δύναμη που ασκείται στο κιβώτιο είναι η στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau}$. Ισχύει:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow T_{\sigma\tau} = ma \quad (1)$$

Στον άξονα y: Το κιβώτιο ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}_1$ και $\vec{N}_1$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = B_1 \Rightarrow N_1 = mg \quad (2)$$

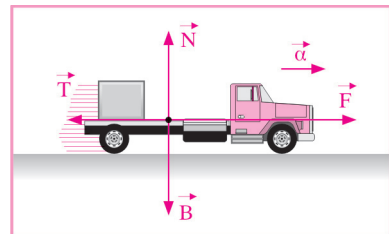
Για να μην κινείται το κιβώτιο, θα πρέπει $T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau, \max} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \leq \mu_{\sigma\tau} N_1$.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει $ma \leq \mu_{\sigma\tau} mg \Rightarrow a \leq \mu_{\sigma\tau} g$.

Επομένως το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης που μπορεί να έχει το φορτηγό είναι $a_{\max} = \mu_{\sigma\tau} g = (0,6 \cdot 10) \text{ m/s}^2 = 6 \text{ m/s}^2$.

- β. Στο σύστημα φορτηγό-κιβώτιο ασκούνται η δύναμη $\vec{F}$ που κινεί το σύστημα, η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$, το βάρος $\vec{B}$ του συστήματος και η κάθετη δύναμη $\vec{N}$ από το έδαφος στο σύστημα. Σε κάθε άξονα ισχύουν:

Στον άξονα x: Το σύστημα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με



επιτάχυνση $a = 6 \text{ m/s}^2$, με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ και της τριβής ολίσθησης $\vec{T}$. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F = (M + m)a \Rightarrow F - T = (M + m)a \Rightarrow F = T + (M + m)a \quad (1)$$

Στον άξονα y: Το σύστημα φορτηγό-κιβώτιο ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων $\vec{B}$ και $\vec{N}$. Άρα, σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = (M + m)g$$

Επομένως το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι $T = \mu N = \mu(M + m)g$.

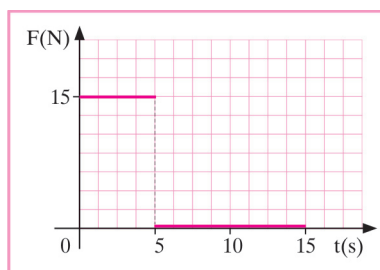
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει $F = \mu(M + m)g + (M + m)a \Rightarrow \Rightarrow F = (M + m)(\mu g + a) \Rightarrow F = [(1.000 + 50) \cdot (0,2 \cdot 10 + 6)] \text{ N} \Rightarrow F = 8.400 \text{ N}$.

1.18 9η εφαρμογή

Σκοπός: Κατασκευή διαγράμματος $a - t$ και $v - t$ από διάγραμμα $F - t$, όταν στο σώμα που κινείται ασκείται και η δύναμη της τριβής.

Σε ένα σώμα μάζας 1 kg το οποίο αρχικά είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τον χρόνο, όπως φαίνεται στο διάγραμμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu = 0,5$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$. Να κατασκευάσετε:

- το διάγραμμα της τριβής ολίσθησης σε συνάρτηση με τον χρόνο.
- το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου.
- το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.



Λύση

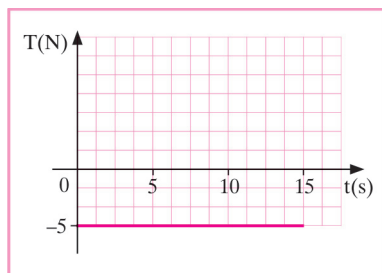
Σχόλιο: Η τριβή ολίσθησης κατά την κίνηση ενός σώματος σε οριζόντιο επίπεδο είναι ανεξάρτητη από την οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ που του ασκείται. Αν οι επιφάνειες επαφής των δύο σωμάτων δεν αλλάζουν, το μέτρο της τριβής ολίσθησης παραμένει σταθερό. Από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στα διάφορα χρονικά διαστήματα της κίνησής του, προσδιορίστε το είδος της κίνησης και εφαρμόστε τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν σε κάποιο χρονικό διάστημα η δύναμη $\vec{F}$ είναι μηδέν, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα δε θα είναι μηδέν, γιατί στο σώμα ασκείται και η δύναμη της τριβής.

- Η τριβή ολίσθησης παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του σώματος και ίση με $T = \mu N$.

Επειδή στον άξονα των y το σώμα ισορροπεί με την επίδραση των δυνάμεων του βάρους $\vec{B}$ και της κάθετης δύναμης $\vec{N}$, θα ισχύει σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B \Rightarrow N = mg = (1 \cdot 10) \text{ N} = 10 \text{ N}$.

Άρα το μέτρο της τριβής ολίσθησης θα είναι $T = \mu N = (0,5 \cdot 10) \text{ N} = 5 \text{ N}$ (αλγεβρικά: $T = -5 \text{ N}$). Το διάγραμμα της τριβής ολίσθησης σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Το σώμα εκτελεί δύο κινήσεις:

Από 0 έως 5 s στο σώμα ασκούνται η σταθερή δύναμη $F = 15 \text{ N}$ και η τριβή $T = 5 \text{ N}$. Άρα το σώμα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου a_1 . Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, θα ισχύει στον άξονα x :

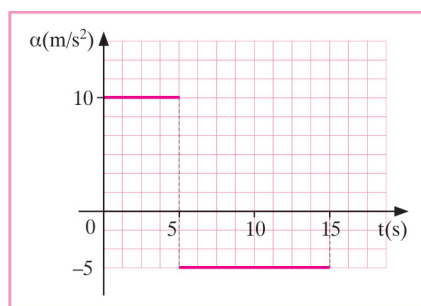
$$\Sigma F_x = ma_1 \Rightarrow F_1 - T = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F_1 - T}{m} = \frac{15 - 5}{1} \text{ m/s}^2 = 10 \text{ m/s}^2$$

Από 5 s έως 15 s στο σώμα ασκείται μόνο η δύναμη της τριβής $T = 5 \text{ N}$, η οποία έχει φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης του σώματος. Άρα το σώμα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου a_2 .

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, θα ισχύει στον άξονα x :

$$\Sigma F_x = ma_2 \Rightarrow T = ma_2 \Rightarrow a_2 = \frac{T}{m} = \frac{5}{1} \text{ m/s}^2 = 5 \text{ m/s}^2$$

Το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



γ. Από 0 έως 5 s το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Επομένως θα ισχύει:

$$v = a_1 t$$

Τη χρονική στιγμή $t = 5 \text{ s}$ η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$v = a_1 t = (10 \cdot 5) \text{ m/s} = 50 \text{ m/s}$$

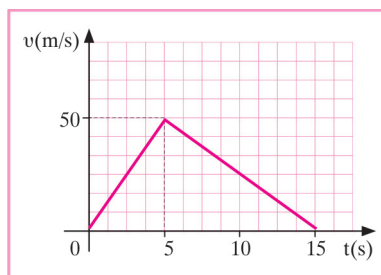
Από 5 s έως 15 s το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα την τελική ταχύτητα της προηγούμενης κίνησης, δηλαδή $v_0 = 50 \text{ m/s}$. Επομένως θα ισχύει:

$$v = v_0 - a_2 t$$

Η διάρκεια της δεύτερης κίνησης είναι 10 s, οπότε τη χρονική στιγμή $t = 15$ s η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$v = v_0 - a_2 t = (50 - 5 \cdot 10) \text{ m/s} = 0$$

Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ

Α' ΟΜΑΔΑ

Στις ερωτήσεις της Α' ομάδας περιλαμβάνονται ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, σωστού-λάθους, συμπλήρωσης κενού ή αντιστοίχισης.

- 1.19** Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.
- ☐ Η τριβή εμφανίζεται μόνο όταν ένα σώμα κινείται σε σχέση με ένα άλλο.
 - ☐ Μονάδα μέτρησης της τριβής στο S.I. είναι το 1 N.
 - ☐ Η τριβή δεν είναι πάντα ανεπιθύμητη δύναμη.
 - ☐ Αν δεν υπήρχε η τριβή, δε θα μπορούσαμε ούτε να περπατάμε ούτε να σταματάμε.
 - ☐ Η τριβή ολίσθησης είναι ίδια είτε το σώμα κινείται σε ένα γυαλισμένο πάτωμα είτε σε ένα παγοδρόμιο.
- 1.20** Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.
- ☐ Η τριβή ολίσθησης ανήκει στις δυνάμεις επαφής.
 - ☐ Αν σε ένα σώμα που ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο ασκήσουμε μια οριζόντια δύναμη, το σώμα θα αρχίσει αμέσως να κινείται ανεξάρτητα από το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
 - ☐ Η τριβή εμφανίζεται μόνο όταν ένα σώμα παραμένει ακίνητο.
 - ☐ Χωρίς την τριβή δε θα μπορούσε ένα αυτοκίνητο να αρχίσει να κινείται.
 - ☐ Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης έχει ως μονάδα το 1 N.

- 1.21** Η τριβή ολίσθησης:
- α. εξαρτάται από το εμβαδόν των τριβόμενων επιφανειών.
 - β. είναι αντιστρόφως ανάλογη με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.
 - γ. είναι ανάλογη με την κάθετη δύναμη που δέχεται το σώμα από την επιφάνεια με την οποία βρίσκεται σε επαφή.
 - δ. αυξάνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητα με την οποία κινείται το σώμα.

1.22 Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο. Η τριβή που εμφανίζεται μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου δαπέδου:

- α. είναι σταθερή.
- β. αυξάνεται.
- γ. μειώνεται.
- δ. άλλες φορές αυξάνεται και άλλες φορές μειώνεται.

1.23 Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Αν διπλασιαστεί το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα, η τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα:

- α. θα διπλασιαστεί.
- β. θα υποδιπλασιαστεί.
- γ. δε θα αλλάξει.
- δ. δεν μπορούμε να γνωρίζουμε.

1.24 Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Κάποια χρονική στιγμή καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα. Η τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα:

- α. θα μηδενιστεί.
- β. θα αυξηθεί.
- γ. θα μειωθεί.
- δ. δε θα μεταβληθεί.

1.25 Στον διάδρομο ενός σουπερμάρκετ σπρώχνουμε ένα καρότσι γεμάτο με ψώνια. Για να μειώσουμε την τριβή ολίσθησης που δέχεται το καρότσι από το πάτωμα, θα πρέπει:

- α. να το σπρώξουμε με μεγαλύτερη ταχύτητα.
- β. να το σπρώξουμε με μικρότερη ταχύτητα.
- γ. να αφαιρέσουμε πράγματα από αυτό.
- δ. να προσθέσουμε και άλλα πράγματα μέσα σε αυτό.

1.26 Σε μια αποθήκη ένας εργάτης σπρώχνει ένα κιβώτιο γεμάτο πράγματα, ασκώντας σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$. Για να αυξήσουμε την τριβή ολίσθησης που δέχεται το κιβώτιο από το πάτωμα, θα πρέπει:

- α. να αυξήσουμε με κάποιον τρόπο το εμβαδόν της επιφάνειας του κιβωτίου που βρίσκεται σε επαφή με το πάτωμα.
- β. να σπρώξουμε το κιβώτιο με μικρότερη ταχύτητα.

- γ. να τοποθετήσουμε πάνω στο κιβώτιο ένα δεύτερο όμοιο κιβώτιο.
- δ. να αφαιρέσουμε από το κιβώτιο ορισμένα πράγματα.

1.27 Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με σταθερή ταχύτητα και με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Κατά την οριζόντια διεύθυνση:

- α. στο σώμα δεν ασκείται τριβή.
- β. στο σώμα ασκείται τριβή, το μέτρο της οποίας είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
- γ. στο σώμα ασκείται τριβή, το μέτρο της οποίας είναι μικρότερο από το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
- δ. στο σώμα ασκείται τριβή, το μέτρο της οποίας είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

1.28 Ένα σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο που δεν είναι λείο και στον άξονα της κίνησής του ασκούνται μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$. Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.

- ☐ Αν το σώμα ήταν αρχικά ακίνητο, για το μέτρο της επιτάχυνσης $\vec{a}$ που θα αποκτήσει ισχύει: $F + T = ma$.
- ☐ Αν το σώμα επιβραδύνεται και η δύναμη $\vec{F}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την κίνηση, για το μέτρο της επιβράδυνσης $\vec{a}$ του σώματος ισχύει: $F + T = ma$.
- ☐ Αν το σώμα επιβραδύνεται και η δύναμη $\vec{F}$ έχει ίδια κατεύθυνση με την κίνηση, για το μέτρο της επιβράδυνσης $\vec{a}$ του σώματος ισχύει: $T - F = ma$.
- ☐ Αν το σώμα επιβραδύνεται, το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι μεγαλύτερο σε σχέση με την τριβή ολίσθησης που εμφανίζεται αν το σώμα επιταχύνεται.
- ☐ Ανεξάρτητα από το είδος της κίνησης, η τριβή ολίσθησης που δέχεται το σώμα είναι ίση με $T = \mu mg$.

1.29 Σε ένα σώμα που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε οριζόντιο δάπεδο ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην ίδια κατεύθυνση με την κίνηση του σώματος οριζόντια δύναμη $F = 4 \text{ N}$. Αν το μέτρο της τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι $T = 5 \text{ N}$, τότε τι από τα παρακάτω ισχύει για την ταχύτητα του σώματος;

- α. Αυξάνεται.
- β. Μειώνεται.
- γ. Παραμένει σταθερή.
- δ. Αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται.

1.30 Μικρό σώμα κινείται σε οριζόντιο επίπεδο που δεν είναι λείο και στον άξονα της κίνησής του ασκούνται μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ (κατά τη φορά κίνησης

του σώματος) και η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$. Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.

- ☐ Αν το σώμα επιταχύνεται, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της τριβής $\vec{T}$.
- ☐ Αν το σώμα επιβραδύνεται, το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ θα είναι μικρότερο από το μέτρο της τριβής $\vec{T}$.
- ☐ Αν το σώμα επιταχύνεται, το μέτρο της τριβής $\vec{T}$ συνεχώς θα μειώνεται.
- ☐ Αν το σώμα επιβραδύνεται, το μέτρο της τριβής $\vec{T}$ συνεχώς θα αυξάνεται.
- ☐ Το μέτρο της τριβής ολίσθησης είναι πάντα το ίδιο, ανεξάρτητα από την κίνηση που κάνει το σώμα.

1.31 Σε ένα σώμα που ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, το μέτρο της οποίας αρχίζει να αυξάνεται ξεκινώντας από την τιμή μηδέν. Η τριβή που εμφανίζεται μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου δαπέδου:

- α. είναι σταθερή.
- β. αυξάνεται συνεχώς μέχρι τη στιγμή που το σώμα θα αρχίσει να κινείται.
- γ. μειώνεται συνεχώς μέχρι τη στιγμή που το σώμα θα αρχίσει να κινείται, οπότε μηδενίζεται.
- δ. είναι αρχικά σταθερή και, όταν το σώμα αρχίσει να κινείται, μειώνεται.

1.32 Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.

- ☐ Η στατική τριβή που μπορεί να ασκείται σε ένα σώμα δεν έχει σταθερή τιμή.
- ☐ Το μέτρο της τριβής ολίσθησης που ασκείται σε ένα σώμα που κινείται αυξάνεται συνεχώς.
- ☐ Η οριακή τριβή είναι η μέγιστη τιμή της τριβής ολίσθησης.
- ☐ Ο συντελεστής στατικής τριβής και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι αδιάστατα φυσικά μεγέθη.
- ☐ Ο συντελεστής στατικής τριβής προκύπτει από το πηλίκο δύο δυνάμεων.

1.33 Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης σε σύγκριση με τον συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ δύο ίδιων επιφανειών είναι:

- α. μεγαλύτερος.
- β. μικρότερος.
- γ. ίσος.
- δ. δεν μπορούμε να γνωρίζουμε, αν δεν ξέρουμε το είδος των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.

1.34 Το μέτρο της οριακής τριβής σε σύγκριση με το μέτρο της τριβής ολίσθησης για δύο ίδιες επιφάνειες είναι:

- α. μικρότερο.
- β. μεγαλύτερο.
- γ. ίσο.
- δ. δεν μπορούμε να γνωρίζουμε, αν δεν ξέρουμε το είδος των επιφανειών που βρίσκονται σε επαφή.

1.35 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ που ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 10 \text{ N}$. Το σώμα μόλις που δεν κινείται ($g = 10 \text{ m/s}^2$). Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.

- ☐ Η οριακή τριβή είναι ίση με 10 N .
- ☐ Η στατική τριβή μπορεί να πάρει τιμές μεταξύ 0 και 10 N .
- ☐ Ο συντελεστής στατικής τριβής έχει τιμές μεταξύ 0 και $0,5$.
- ☐ Ο συντελεστής στατικής τριβής θα γίνει μικρότερος από $0,5$, αν στο σώμα ασκηθεί οριζόντια δύναμη 20 N .
- ☐ Η τριβή ολίσθησης έχει τιμή μεγαλύτερη από 10 N .
- ☐ Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μικρότερος από $0,5$.

1.36 Σώμα μάζας $m = 10 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_{\text{στ}} = 0,5$, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,4$. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$. Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.

- ☐ Η δύναμη τριβής που ασκείται στο σώμα, αν ασκηθεί οριζόντια δύναμη $F = 30 \text{ N}$, είναι ίση με 30 N .
- ☐ Η ελάχιστη οριζόντια δύναμη που απαιτείται για να κινηθεί το σώμα είναι ίση με 40 N .
- ☐ Η οριζόντια δύναμη που απαιτείται για να αρχίσει να κινείται το σώμα με επιτάχυνση $a = 2 \text{ m/s}^2$ είναι ίση με 60 N .
- ☐ Η οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα, όταν κινείται με σταθερή ταχύτητα, είναι ίση με 40 N .
- ☐ Η δύναμη τριβής που ασκείται στο σώμα, αν ασκηθεί οριζόντια δύναμη $F = 100 \text{ N}$, είναι ίση με 40 N .

1.37 Να σημειώσετε με Σ κάθε σωστή πρόταση και με Λ κάθε λανθασμένη.

- ☐ Ένα βιβλίο ισορροπεί πάνω σε ένα τραπέζι. Στο βιβλίο εκτός από το βάρος του και την κάθετη δύναμη ασκείται και η στατική τριβή.

- ☐ Ένα βιβλίο ισορροπεί πάνω σε ένα τραπέζι. Στο βιβλίο ασκείται κάποια χρονική στιγμή μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, αλλά αυτό δεν κινείται. Επομένως στο βιβλίο ασκείται και η στατική τριβή, το μέτρο της οποίας είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
- ☐ Ένα βιβλίο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε ένα τραπέζι με την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Επομένως στο βιβλίο ασκείται και η στατική τριβή, το μέτρο της οποίας είναι ίσο με το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
- ☐ Η τριβή ολίσθησης που δέχεται ένα σώμα είναι κάθετη στην κάθετη δύναμη και κάθετη στην κατεύθυνση κίνησης του σώματος.
- ☐ Η τριβή που εμφανίζεται όταν ένα σώμα κινείται μέσα σε ρευστό ονομάζεται αντίσταση.

Β' ΟΜΑΔΑ

Στις ερωτήσεις της Β' ομάδας που ακολουθούν να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

1.38 Σώμα μάζας m μόλις που ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης 30° . Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι ίσος με:

α. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

β. $\frac{1}{2}$.

γ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.39 Μεταξύ ενός σώματος και οριζόντιου επιπέδου ο συντελεστής στατικής τριβής είναι ίσος με $\mu_{\text{στ}}$, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι μικρότερος κατά 10%. Αν $\vec{F}_1$ είναι η οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα όταν είναι μόλις έτοιμο να κινηθεί και $\vec{F}_2$ είναι η οριζόντια δύναμη που ασκείται όταν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, ο λόγος $\frac{F_1}{F_2}$ των μέτρων των δυνάμεων είναι ίσος με:

α. 9.

β. $\frac{9}{10}$.

γ. $\frac{10}{9}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.40 Ένας μαθητής συγκρατεί ακίνητο το βιβλίο της Φυσικής του σε κατακόρυφη θέση, πιέζοντάς το ανάμεσα στις παλάμες του. Αν η ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκεί κάθε παλάμη του μαθητή ώστε το βιβλίο να μην πέφτει έχει μέτρο τετραπλάσιο του βάρους του βιβλίου, ο



συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του βιβλίου και κάθε παλάμης είναι ίσος με:

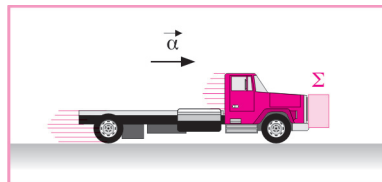
α. 0,25.

β. 0,2.

γ. 0,5.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.41 Το μέτρο της ελάχιστης επιτάχυνσης $a_{\min}$ με την οποία πρέπει να κινείται το φορτηγό του σχήματος ώστε το σώμα Σ να μη γλιστράει προς τα κάτω είναι:



α. $a_{\min} = \frac{g}{\mu_{\sigma\tau}}$.

β. $a_{\min} = \frac{2g}{\mu_{\sigma\tau}}$.

γ. $a_{\min} = \frac{g}{2\mu_{\sigma\tau}}$.

(Όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και $\mu_{\sigma\tau}$ ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος Σ και του φορτηγού.)

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.42 Δύο σώματα με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ αρχίζουν να κινούνται σε δύο διαφορετικά οριζόντια δάπεδα με τα οποία εμφανίζουν συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_1 και μ_2 αντίστοιχα, με την επίδραση διαφορετικών οριζόντιων δυνάμεων. Αν η τριβή ολίσθησης είναι ίδια και για τα δύο σώματα, για τους συντελεστές τριβής ολίσθησης ισχύει:

α. $\mu_1 = \mu_2$.

β. $\mu_1 = 2\mu_2$.

γ. $\mu_1 = \frac{\mu_2}{2}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.43 Σώμα μάζας m αρχίζει να κινείται με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ σε οριζόντιο δάπεδο και το μέτρο της τριβής ολίσθησης που δέχεται είναι ίσο με T_1 . Αν επαναλάβουμε τη διαδικασία αλλά ταυτόχρονα με τη δύναμη $\vec{F}$ ασκηθεί και μια δύναμη $\vec{F}_1$ αντίρροπη του βάρους και μέτρου ίσου με το μισό του βάρους, το μέτρο της τριβής ολίσθησης που θα δέχεται θα είναι ίσο με T_2 . Ισχύει:

α. $T_1 = T_2$.

β. $T_1 > T_2$.

γ. $T_1 < T_2$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.44 Σώμα μάζας m κατεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο του οποίου τη γωνία κλίσης φ μπορούμε να μεταβάλλουμε. Αν η γωνία κλίσης είναι $\varphi_1 = 60^\circ$, η τριβή ολίσθησης που δέχεται είναι ίση με $\vec{T}_1$, ενώ, αν η γωνία κλίσης είναι $\varphi_2 = 45^\circ$, η

τριβή ολίσθησης που δέχεται είναι ίση με $\vec{T}_2$. Για τον λόγο $\frac{T_1}{T_2}$ των μέτρων των τριβών ολίσθησης ισχύει:

α. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$. β. $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. γ. $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.45 Σώμα βάρους $\vec{B}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ . Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το οριζόντιο επίπεδο είναι ίσο με:

α. μB . β. $(\mu + 1)B$. γ. $B\sqrt{\mu^2 + 1}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.46 Ένα μικρό σώμα είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης ίσο με μ . Κάποια χρονική στιγμή στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου ίσου με το βάρος του σώματος. Το σώμα ξεκινάει αμέσως να κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση μέτρου (όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας):

α. μg . β. $(1 - \mu)g$. γ. $(\mu - 1)g$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.47 Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ , με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Αν ακαριαία διπλασιαστεί το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, τότε το σώμα (όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας):

- α. θα αρχίσει να επιταχύνεται με επιτάχυνση μέτρου $a = \mu g$.
β. θα αρχίσει να επιταχύνεται με επιτάχυνση μέτρου $a = 2\mu g$.
γ. θα εξακολουθεί να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.48 Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ , με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Αν ακαριαία αντιστραφεί η δύναμη $\vec{F}$, τότε το σώμα (όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας) θα αρχίσει:

- α. να επιταχύνεται με επιτάχυνση μέτρου $a = \mu g$.
β. να επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου $a = 2\mu g$.
γ. να επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου $a = \mu g$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.49 Ένα μικρό σώμα είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης ίσο με μ . Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου ίσου με το βάρος του, οπότε αρχίζει αμέσως να κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση μέτρου a_1 . Τη χρονική στιγμή t_1 αντιστρέφεται ακαριαία η δύναμη $\vec{F}$, οπότε το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου a_2 . Για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης ισχύει:

α. $\mu = \frac{a_1 + a_2}{g}$. β. $\mu = \frac{a_1 + a_2}{2g}$. γ. $\mu = \frac{a_2 - a_1}{2g}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.50 Μικρό σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ το οποίο δεν είναι λείο. Για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ μεταξύ σώματος και επιπέδου ισχύει:

α. $\mu = \eta \mu \varphi$. β. $\mu = \sigma \nu \varphi$. γ. $\mu = \epsilon \varphi \varphi$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.51 Σώμα μάζας m είναι ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Αν στο σώμα ασκηθεί οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, θα αρχίσει να κινείται με επιτάχυνση $\vec{a}$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι ίσος με $\mu = \frac{2a}{g}$ (όπου g

η επιτάχυνση της βαρύτητας), όταν στο αρχικά ακίνητο σώμα ασκηθεί δύναμη διπλάσιου μέτρου, θα αρχίσει να κινείται με επιτάχυνση μέτρου:

α. $2a$. β. $3a$. γ. $4a$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.52 Μικρό σώμα εκτοξεύεται με ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε οριζόντιο επίπεδο το οποίο δεν είναι λείο και με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ . Το σώμα επιβραδύνεται κινούμενο ευθύγραμμα με επιβράδυνση μέτρου a . Αν το σώμα εκτοξευτεί με ταχύτητα $\vec{v}_0$ στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο αλλά αμέσως μετά τη στιγμή της εκτόξευσης στο σώμα ασκείται δύναμη $\vec{F}$ ομόρροπη του βάρους και ίδιου μέτρου με αυτό, το σώμα θα επιβραδυνθεί κινούμενο ευθύγραμμα με επιβράδυνση μέτρου:

α. a . β. $2a$. γ. $\frac{a}{2}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.53 Μικρό σώμα εκτοξεύεται με ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε οριζόντιο επίπεδο το οποίο δεν είναι λείο και με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_1 = 0,5$.

Το σώμα κινείται ευθύγραμμα και σταματάει αφού διανύσει διάστημα S . Αν το ίδιο σώμα εκτοξευτεί με ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε ένα άλλο οριζόντιο επίπεδο το οποίο δεν είναι λείο και με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu_2 = 0,3$, θα σταματήσει αφού κινηθεί ευθύγραμμα και διανύσει διάστημα:

- $$\alpha. \quad 3S. \qquad \qquad \beta. \quad 5S. \qquad \qquad \gamma. \quad \frac{5S}{3}.$$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.54 Μικρό σώμα εκτοξεύεται με ταχύτητα $\vec{v}_0$ σε οριζόντιο επίπεδο το οποίο δεν είναι λείο και με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ . Το σώμα κινείται ευθύγραμμα και σταματάει μετά από χρόνο Δt . Αν το ίδιο σώμα εκτοξευτεί με διπλάσια ταχύτητα σε ένα άλλο οριζόντιο επίπεδο το οποίο δεν είναι λείο και με το οποίο εμφανίζει διπλάσιο συντελεστή τριβής ολίσθησης, θα σταματήσει αφού κινηθεί ευθύγραμμα μετά από χρόνο:

- $$\alpha. \quad \Delta t. \qquad \beta. \quad 2\Delta t. \qquad \gamma. \quad \frac{\Delta t}{4}.$$

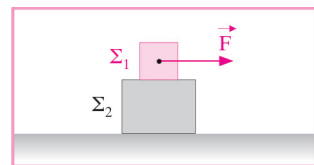
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.55 Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m και $2m$ αντίστοιχα εκτοξεύονται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με ταχύτητα ίδιου μέτρου v_0 από σημείο O μιας ευθείας και κινούνται ευθύγραμμα προς την ίδια κατεύθυνση. Αν γνωρίζετε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίδιος και για τα δύο σώματα, την ίδια χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία εξακολουθούν να κινούνται και τα δύο σώματα:

- α. μεγαλύτερη ταχύτητα έχει το Σ_1 .
- β. μεγαλύτερη ταχύτητα έχει το Σ_2 .
- γ. και τα δύο σώματα έχουν ίδιου μέτρου ταχύτητα.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1.56 Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος με μάζες m και $3m$ αντίστοιχα είναι ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα Σ_1 ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο ίσο με το βάρος του σώματος Σ_1 . Ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων, έτσι ώστε να κινούνται σαν ένα σώμα, είναι ίσος με:



- $\alpha. \frac{1}{2}.$ $\beta. \frac{3}{8}.$ $\gamma. \frac{3}{4}.$

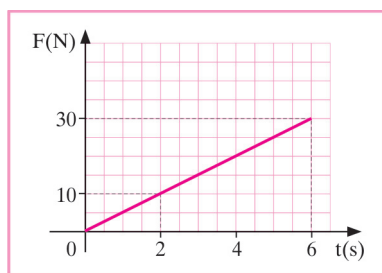
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

1.57 Ένας μαθητής συγκρατεί ακίνητο το βιβλίο της Φυσικής του μάζας $m = 800 \text{ g}$ σε κατακόρυφη θέση, πιέζοντας το ανάμεσα στις παλάμες του με οριζόντια δύναμη. Αν η ελάχιστη δύναμη που πρέπει να ασκεί κάθε παλάμη του μαθητή ώστε το βιβλίο να μην πέφτει είναι $F_{\min} = 5 \text{ N}$, να βρείτε τον συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ του βιβλίου και κάθε παλάμης. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.



1.58 Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται πώς μεταβάλλεται το μέτρο μιας οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται σε ένα σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ το οποίο είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_{\text{στ}} = 0,4$, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, να βρείτε:



- τη χρονική στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται.
- τη στιγμιαία επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$.

1.59 Σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι αρχικά ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_{\text{στ}} = 0,3$, ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,25$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$, να βρείτε:

- τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.
- την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα, όταν του ασκηθεί οριζόντια δύναμη μέτρου ίσου με το μέτρο της οριακής τριβής.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.60 Σώμα μάζας $m = 800 \text{ g}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα είναι έτοιμο να κινηθεί όταν του ασκηθεί οριζόντια δύναμη $F = 4 \text{ N}$, ενώ κινείται με σταθερή ταχύτητα όταν του ασκείται οριζόντια δύναμη $F' = 3 \text{ N}$. Να βρείτε:

- τον συντελεστή οριακής τριβής.
- τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.61 Η εξίσωση κίνησης ενός σώματος μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ που κινείται ευθύγραμμο σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ είναι

$x = 10t$ (S.I.). Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίσος με $\mu = 0,5$, να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.62 Μικρό σώμα μάζας $m = 0,4 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε οριζόντιο επίπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F = 1 \text{ N}$. Να βρείτε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.63 Ένα άδειο κιβώτιο μάζας $m = 12 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα σε οριζόντιο επίπεδο, όταν σε αυτό ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 24 \text{ N}$. Αν το κιβώτιο γεμίσει με άμμο μάζας $m_1 = 8 \text{ kg}$, ποια θα πρέπει να είναι η εξωτερική οριζόντια δύναμη $\vec{F}'$ που θα πρέπει να του ασκούμε, έτσι ώστε να κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο; Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.64 Σε ένα σώμα που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ μια οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 36 \text{ N}$, οπότε σε χρόνο $t = 3 \text{ s}$ το σώμα μετατοπίζεται ευθύγραμμα κατά 45 m . Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και εδάφους είναι $\mu = 0,2$, να βρείτε:

α. τη μάζα του σώματος.

β. το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.65 Σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 20 \text{ N}$. Διαπιστώνεται ότι, όταν το σώμα μετατοπιστεί ευθύγραμμα κατά 16 m , έχει αποκτήσει ταχύτητα 8 m/s .

α. Πόση είναι η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα;

β. Να αποδείξετε ότι μεταξύ σώματος και δαπέδου αναπτύσσεται τριβή.

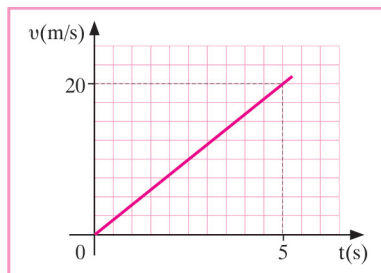
γ. Πόσο είναι το μέτρο της τριβής ολίσθησης;

δ. Να βρείτε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης που αναπτύσσεται μεταξύ σώματος και δαπέδου.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.66 Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα ενός σώματος μάζας $m = 20 \text{ kg}$ που κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F = 200 \text{ N}$ σε συνάρτηση με τον χρόνο. Να βρείτε:

α. το μέτρο της τριβής ολίσθησης.



- β. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.
 γ. την επιτάχυνση με την οποία θα κινούνταν το σώμα, αν εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$ ασκούνταν σε αυτό και μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ αντίρροπη της δύναμης $\vec{F}$ και μέτρου ίσου με το 10% της δύναμης $\vec{F}$.
 Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.67 Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 3 \text{ m/s}$. Στο σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 20 \text{ N}$. Αν η ταχύτητα του σώματος τριπλασιάζεται μετά από χρόνο 6 s από τη στιγμή που ασκήθηκε η δύναμη, να βρείτε:

- α. την επιτάχυνση του σώματος.
 β. το μέτρο της τριβής ολίσθησης.
 γ. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.
 δ. τη μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα των πρώτων πέντε δευτερολέπτων της κίνησής του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

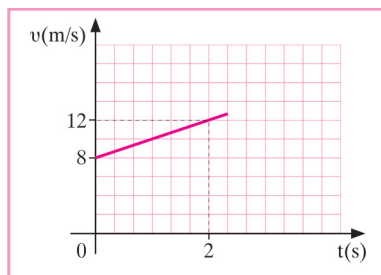
1.68 Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{v}_0$. Στο σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 10 \text{ N}$ που έχει ίδια κατεύθυνση με την κατεύθυνση κίνησης του σώματος. Αν το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ μετατοπίζεται κατά 12 m και γνωρίζετε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,2$, να βρείτε:

- α. την επιτάχυνση του σώματος.
 β. την αρχική του ταχύτητα.
 γ. την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t_1 .

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.69 Στο διπλανό σχήμα δίνεται το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ενός μικρού σώματος μάζας m που κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $F = 18 \text{ N}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,25$. Να βρείτε:

- α. τη μάζα του σώματος.



β. το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από το δάπεδο κατά τη διάρκεια της κίνησής του.

Δίνονται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $\sqrt{17} = 4,1$.

1.70 Σώμα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου v_0 και τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με κατεύθυνση ίδια με την κατεύθυνση κίνησης του σώματος. Αν η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι $x = 20t + 2t^2$ (S.I.) και ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και δαπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,8$, να βρείτε:

α. το μέτρο της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα.

β. το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.71 Σώμα μάζας $m = 3 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 108 \text{ km/h}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 12 \text{ N}$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$, καθώς και το διάστημα που θα έχει διανύσει μέχρι τότε, αν η κατεύθυνση της δύναμης είναι:

α. ίδια με την κατεύθυνση της κίνησης.

β. αντίθετη από την κατεύθυνση της κίνησης.

Δίνονται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου $\mu = 0,2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.72 Ένα σώμα μάζας $m = 30 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 10 \text{ m/s}$. Στο σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 20 \text{ N}$ που έχει φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης του σώματος. Αν το σώμα σταματάει μετά από χρόνο 5 s από τη στιγμή που ασκήθηκε η δύναμη, να βρείτε:

α. το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος.

β. την τριβή ολίσθησης.

γ. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.

δ. τη μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα των 5 s .

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.73 Ένα σώμα εκτοξεύεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ με ταχύτητα μέτρου v_0 και κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο και κατά τη διάρκεια του 1ου δευτερολέπτου της κίνησής του μετατοπίζεται κατά 9 m .

α. Ποια είναι η αρχική ταχύτητα του σώματος;

- β. Αν η μάζα του σώματος είναι $m = 2,5 \text{ kg}$, ποιο θα έπρεπε να ήταν το μέτρο μιας οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που θα έπρεπε να ασκείται στο σώμα, έτσι ώστε αυτό να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά;

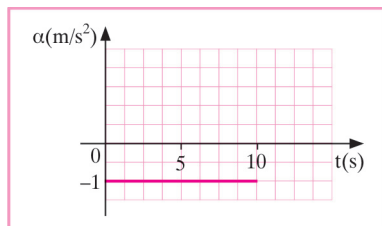
Δίνονται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου ίσος με $\mu = 0,2$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 1.74** Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο δρόμο με αρχική ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Αν η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των τροχών του αυτοκινήτου και του δρόμου είναι ίση με το $1/20$ του βάρους του αυτοκινήτου, να βρείτε:
- μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή που ο οδηγός φρενάρει θα υποδιπλασιαστεί η ταχύτητα του αυτοκινήτου.
 - πόσο θα μετατοπιστεί το αυτοκίνητο στο τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησής του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 1.75** Ένα σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια σταθερή δύναμη $F = 10 \text{ N}$ με φορά αντίθετη από τη φορά κίνησης του σώματος. Αν το σώμα ακινητοποιείται μετά από 2 s , να προσδιορίσετε τον συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου επιπέδου. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 1.76** Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η επιτάχυνση ενός σώματος μάζας $m = 3 \text{ kg}$ που κινείται ευθύγραμμα προς τη θετική κατεύθυνση ενός ευθύγραμμου δρόμου με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $F = 6 \text{ N}$ που έχει τη φορά της κίνησης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο. Το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ είχε ταχύτητα $v_0 = 12 \text{ m/s}$. Να βρείτε:



- το μέτρο της τριβής ολίσθησης.
- τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.
- ποια επιπλέον οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ θα έπρεπε να ασκηθεί στο σώμα μετά από τα 10 s , έτσι ώστε να μηδενιστεί ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητάς του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- 1.77** Ένα σώμα μάζας $m = 10 \text{ kg}$ κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκείται οριζόντια σταθερή δύναμη $F = 8 \text{ N}$ με φορά τη φορά της κίνησης του σώματος. Αν ο συντε-

λεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του οριζόντιου επιπέδου είναι $\mu = 0,1$, να βρείτε:

- α. το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος.
- β. τη μετατόπισή του μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.78 Σε ένα αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ που μπορεί να κινηθεί σε ευθύγραμμο δρόμο ασκούνται τη χρονική στιγμή $t = 0$ δύο οριζόντιες δυνάμεις $F_1 = 20 \text{ N}$ και $F_2 = 5 \text{ N}$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,1$, να βρείτε:

- α. την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα, όταν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ομόρροπες.
- β. την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί το σώμα, όταν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι αντίρροπες.
- γ. πόση είναι η ταχύτητα του σώματος κάθε φορά 4 s μετά την έναρξη της κίνησής του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.79 Σώμα μάζας $m = 8 \text{ kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$ σε οριζόντιο δάπεδο με την επίδραση δύο οριζόντιων και αντίρροπων δυνάμεων $F_1 = 40 \text{ N}$ και $F_2 = 10 \text{ N}$.

- α. Ποιος είναι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης;
- β. Με ποια επιτάχυνση θα κινηθεί το σώμα και πόσο θα μετατοπιστεί σε χρόνο 4 s, αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_1$;
- γ. Με ποια επιτάχυνση θα κινηθεί το σώμα και πόσο θα μετατοπιστεί σε χρόνο 2 s, αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ καταργηθεί η δύναμη $\vec{F}_2$;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.80 Σώμα μάζας $m = 4 \text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα $v_0 = 20 \text{ m/s}$ σε οριζόντιο δάπεδο, όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζουν να ασκούνται σε αυτό δύο οριζόντιες και ομόρροπες δυνάμεις $F_1 = 4 \text{ N}$ και $\vec{F}_2$ ($F_2 > F_1$) που έχουν αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση της κίνησης του σώματος. Διαπιστώνεται ότι το σώμα σταματάει μετά από 4 s. Αν οι δύο δυνάμεις ήταν αντίρροπες, το σώμα μετά από 20 s θα διπλασίαζε το μέτρο της αρχικής του ταχύτητας. Να βρείτε:

- α. το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$.
- β. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.81 Σε ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ που κινείται με ταχύτητα $v_0 = 12 \text{ m/s}$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο ασκούνται τη χρονική στιγμή $t = 0$ δύο αντίρροπες δυνάμεις $F_1 = 6 \text{ N}$ και $\vec{F}_2$ ($F_1 < F_2$). Η δύναμη $\vec{F}_1$ έχει ίδια κατεύθυνση με την αρχική ταχύτητα του σώματος. Διαπιστώνεται ότι μετά από 3 s η ταχύτητα του σώματος υποδιπλασιάζεται. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,1$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$, να βρείτε:

- α. το μέτρο της επιβράδυνσης με την οποία κινείται το σώμα.
- β. το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$.

1.82 Σε σώμα μάζας $m = 2,5 \text{ kg}$ που ηρεμεί σε οριζόντιο δάπεδο ασκούνται τη χρονική στιγμή $t = 0$ δύο οριζόντιες και αντίρροπες δυνάμεις $F_1 = 3 \text{ N}$ και $F_2 = 8 \text{ N}$. Διαπιστώνεται ότι το σώμα μετά από 2 s έχει αποκτήσει ταχύτητα $v = 2 \text{ m/s}$. Να βρείτε:

- α. το μέτρο της τριβής ολίσθησης.
 - β. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και δαπέδου.
- Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.83 Ένα σώμα μάζας $m = 4 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,25$. Το σώμα αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να κινείται με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $F = 30 \text{ N}$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$. Τότε ακαριαία αντιστρέφεται η δύναμη $\vec{F}$. Να βρείτε:

- α. τη μετατόπιση κατά τη διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησης του σώματος.
- β. τον συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος.
- γ. το μέτρο μιας επιπλέον οριζόντιας δύναμης $\vec{F}'$ που θα έπρεπε να ασκήσουμε τη χρονική στιγμή $t_2 = 5 \text{ s}$ στο σώμα, έτσι ώστε από τη χρονική στιγμή αυτή και μετά να μην άλλαζε το μέτρο της ταχύτητάς του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.84 Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,2$. Το σώμα αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να κινείται με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $F = 10 \text{ N}$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , οπότε έχει αποκτήσει ταχύτητα 12 m/s . Τότε ακαριαία αλλάζει κατεύθυνση η δύναμη $\vec{F}$ και γίνεται ομόρροπη του βάρους του σώματος. Να βρείτε:

- α. τη χρονική στιγμή t_1 .
- β. το μέτρο της επιβράδυνσης κατά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης.
- γ. τη συνολική μετατόπιση του σώματος.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.85 Ένα σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Με την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης $F = 30 \text{ N}$ το σώμα μετατοπίζεται κατά 50 m . Στη συνέχεια, η δύναμη παύει να ενεργεί και το σώμα σταματάει αφού μετατοπιστεί ακόμη 100 m . Να βρείτε:

- α. τον συντελεστή τριβής μεταξύ σώματος και οριζόντιου επιπέδου.
- β. τον συνολικό χρόνο κίνησης.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.86 Σε σώμα μάζας $m = 3 \text{ kg}$ που αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται οριζόντια δύναμη $F = 15 \text{ N}$ για χρόνο 5 s . Στη συνέχεια, η δύναμη καταργείται και το σώμα κινείται για 10 s ακόμη. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίσος με $\mu = 0,1$.

- α. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου.
- β. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου.
- γ. Πόσο μετατοπίστηκε το κινητό στον χρόνο των 15 s ;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.87 Σώμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_0 = 3 \text{ m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα ασκούνται ταυτόχρονα δύο οριζόντιες και ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $F_2 = 5 \text{ N}$ ($F_1 > F_2$) που έχουν ίδια κατεύθυνση με την κίνηση του σώματος. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$ καταργούμε τη μεγαλύτερου μέτρου δύναμη, με αποτέλεσμα το σώμα να κινείται για ακόμη 2 s και να διανύει διάστημα 36 m . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,2$. Να βρείτε:

- α. την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 .
- β. το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$.
- γ. τη μετατόπιση του σώματος στη διάρκεια του 2ου δευτερολέπτου της κίνησής του.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.88 Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 4 \text{ kg}$ ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο. Τα σώματα βρίσκονται σε απόσταση $62,5 \text{ m}$ μεταξύ τους. Κάποια χρονική στιγμή στα δύο σώματα ασκούνται οριζόντιες σταθερές δυνάμεις μέτρου $F_1 = 10 \text{ N}$ και $F_2 = 16 \text{ N}$, έτσι ώστε τα δύο σώματα να κινηθούν το ένα προς το άλλο. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων και του επιπέδου είναι $\mu = 0,2$, να βρείτε:

- α. την επιτάχυνση με την οποία θα κινηθεί κάθε σώμα.
- β. μετά από πόσο χρόνο τα δύο σώματα θα συναντηθούν.

γ. πόσο θα έχει μετατοπιστεί κάθε σώμα τότε.

δ. ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας κάθε σώματος τη στιγμή της συνάντησής τους.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

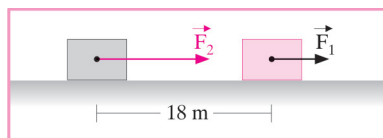
1.89 Σώμα μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ διέρχεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ από σημείο Ο οριζόντιου επιπέδου με ταχύτητα $v_0 = 12 \text{ m/s}$. Στο σώμα ασκείται οριζόντια δύναμη $F_1 = 8 \text{ N}$ που έχει ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα $\vec{v}_0$ του σώματος. Την ίδια χρονική στιγμή από το σημείο Ο ξεκινάει ένα δεύτερο σώμα μάζας $m_2 = \frac{m_1}{2}$, κινούμενο προς την ίδια κατεύθυνση με το m_1 με την επίδραση οριζόντιας δύναμης $\vec{F}_2$. Τα δύο σώματα συναντιούνται μετά από 4 s σε σημείο που απέχει απόσταση 64 m από το σημείο Ο. Να βρείτε:

α. τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ σωμάτων και επιπέδου, θεωρώντας ότι είναι ίδιος και για τα δύο σώματα.

β. το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_2$.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.90 Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$ βρίσκονται σε απόσταση 18 m και ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ στα σώματα ενεργούν οι οριζόντιες δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα, με μέτρα $F_1 = 6 \text{ N}$ και $F_2 = 2F_1$ αντίστοιχα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σωμάτων και επιπέδου είναι ίσος με $0,1$. Να βρείτε:

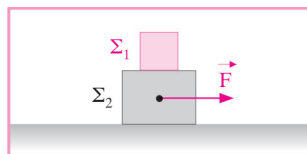


α. μετά από πόσο χρόνο η μεταξύ τους απόσταση θα γίνει 10 m .

β. πόση είναι η ταχύτητα κάθε σώματος τότε.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.91 Τα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 του διπλανού σχήματος έχουν μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$ αντίστοιχα και είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο. Ταυτόχρονα το σώμα Σ_2 ακουμπάει σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Όταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο σώμα Σ_2 ασκηθεί σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 40 \text{ N}$, το σύστημα αρχίζει να κινείται και το σώμα Σ_1 μόλις που δεν ολισθαίνει πάνω στο σώμα Σ_2 . Να βρείτε:

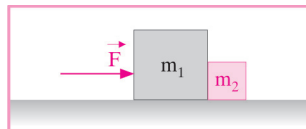


α. την οριακή τριβή που ασκείται μεταξύ των δύο σωμάτων.

β. τον συντελεστή στατικής τριβής.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.92 Τα δύο σώματα του διπλανού σχήματος με μάζες $m_1 = 6 \text{ kg}$ και $m_2 = 4 \text{ kg}$ είναι αρχικά ακίνητα και βρίσκονται σε επαφή. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του δαπέδου είναι ίσος με 0,6. Να βρείτε:

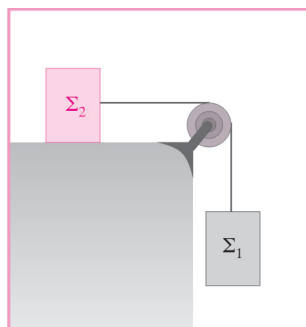


α. ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της σταθερής οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκήσουμε στο σώμα μάζας m_1 , έτσι ώστε το σύστημα των δύο σωμάτων να έχει μετατοπιστεί μετά από χρόνο 2 s κατά 4 m.

β. ποια είναι η ταχύτητα του συστήματος τότε.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.93 Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 7 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$, αντίστοιχα, είναι δεμένα στα ελεύθερα άκρα του αβαρούς και μη εκτατού νήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μεταξύ του νήματος και της αβαρούς τροχαλίας δεν υπάρχει τριβή. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος μάζας m_2 και του οριζόντιου επιπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,5$. Αρχικά τα δύο σώματα είναι ακίνητα και το νήμα τεντωμένο. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.

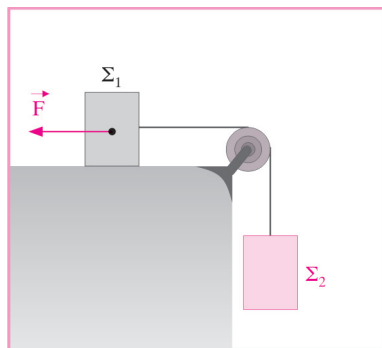


α. Πόση είναι η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 ;

β. Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος Σ_2 , όταν το σώμα Σ_1 έχει μετατοπιστεί κατά 11 m;

Θεωρήστε ότι και τα δύο σώματα δέχονται την ίδια τάση. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.94 Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και $m_2 = 1 \text{ kg}$, αντίστοιχα, είναι δεμένα στα ελεύθερα άκρα του αβαρούς και μη εκτατού νήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μεταξύ του νήματος και της τροχαλίας δεν υπάρχει τριβή. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος μάζας m_1 και του οριζόντιου επιπέδου είναι ίσος με $\mu = 0,1$. Αρχικά τα δύο σώματα είναι ακίνητα και το νήμα τεντωμένο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στο σώμα Σ_1 οριζόντια δύναμη $F = 24 \text{ N}$ και διαπιστώνουμε ότι η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ είναι ίση με 8 m/s .

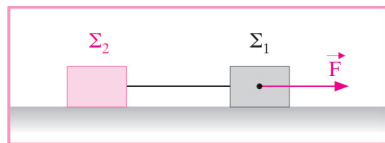
α. Πόση είναι η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 ;

β. Πόση είναι η τάση κάθε νήματος;

γ. Πόση είναι η μάζα του σώματος Σ_1 ;

Θεωρήστε ότι και τα δύο σώματα δέχονται την ίδια τάση. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.95 Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες $m_1 = 4 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$, αντίστοιχα, είναι δεμένα στα ελεύθερα άκρα του αβαρούς και μη εκτατού νήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα.



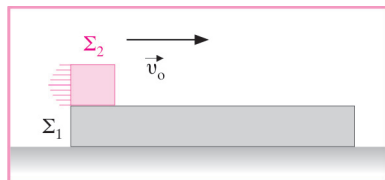
Οι συντελεστές τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του οριζόντιου επιπέδου είναι ίσοι με $\mu_1 = 0,2$ και $\mu_2 = 0,4$ αντίστοιχα. Αρχικά τα δύο σώματα είναι ακίνητα και το νήμα τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στο σώμα Σ_1 οριζόντια δύναμη $F = 20 \text{ N}$ και το σύστημα των δύο σωμάτων ξεκινάει αμέσως να κινείται. Να βρείτε:

α. την επιτάχυνση του συστήματος.

β. πόσο μετατοπίζεται κάθε σώμα σε χρόνο 2 s .

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1.96 Η σανίδα Σ_1 του διπλανού σχήματος έχει μήκος $L = 1 \text{ m}$, μάζα $m_1 = 4 \text{ kg}$ και είναι ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στη σανίδα βρίσκεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 1 \text{ kg}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος Σ_2 και σανίδας είναι ίσος με $\mu = 0,4$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύουμε το σώμα Σ_2 με ταχύτητα $v_0 = 2 \text{ m/s}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α. Να περιγράψετε το είδος της κίνησης που πραγματοποιεί κάθε σώμα και να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσής τους.

β. Ποια χρονική στιγμή t_1 τα δύο σώματα αποκτούν ταχύτητα ίδιου μέτρου; Πόση είναι;

γ. Πόσο μετατοπίζεται κάθε σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 ;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

- ✓ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ
- ✓ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ
- ✓ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

1. Ο νόμος της τριβής

1.19 Λ (εμφανίζεται και όταν ένα σώμα τείνει να κινηθεί σε σχέση με ένα άλλο) – Σ – Σ – Σ – Λ (γιατί εξαρτάται από το είδος των επιφανειών).

1.20 Σ – Λ (πρέπει η δύναμη $\vec{F}$ να έχει μεγαλύτερο μέτρο από τη μέγιστη στατική τριβή $\vec{T}_{\sigma\tau, \max}$ που ασκείται στο σώμα) – Λ (εμφανίζεται και όταν ένα σώμα κινείται) – Σ – Λ (είναι καθαρός αριθμός).

1.21 Σωστή απάντηση είναι η γ .

1.22 Σωστή απάντηση είναι η α .

1.23 Σωστή απάντηση είναι η γ . Η αλλαγή στο μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ δεν επηρεάζει ούτε την κάθετη δύναμη $\vec{N}$, επομένως ούτε και την τριβή $\vec{T}$.

1.24 Σωστή απάντηση είναι η δ . Η τριβή $\vec{T}$ δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη ή όχι της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$.

1.25 Σωστή απάντηση είναι η γ . Η τριβή είναι ίση με $T = \mu N$. Για την κάθετη δύναμη $\vec{N}$ ισχύει: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg$. Βγάζοντας πράγματα από το καρότσι, μειώνεται το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$, επομένως και η τριβή.

1.26 Σωστή απάντηση είναι η γ . Τοποθετώντας ένα όμοιο κιβώτιο, αυξάνεται το μέτρο της κάθετης δύναμης $\vec{N}$, επομένως και η τριβή $\vec{T}$.

1.27 Σωστή απάντηση είναι η β . Αφού $\vec{v} = \text{σταθ.}$, θα πρέπει $\Sigma F = 0 \Rightarrow F = T$.

1.28 Λ (ισχύει: $F - T = ma$) – Σ – Σ – Λ (είναι ίδιο και στις δύο περιπτώσεις) – Σ .

1.29 Σωστή απάντηση είναι η β , αφού $T > F$.

1.30 Σ – Σ – Λ (μένει σταθερό) – Λ (μένει σταθερό) – Σ .

1.31 Σωστή απάντηση είναι η β . Εμφανίζεται στατική τριβή, το μέτρο της οποίας αυξάνεται όσο αυξάνεται η δύναμη $\vec{F}$.

1.32 Σ – Λ (είναι σταθερό) – Λ (είναι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής) – Σ – Σ .

1.33 Σωστή απάντηση είναι η β .

1.34 Σωστή απάντηση είναι η β .

1.35 Σ – Σ – Λ (είναι 0,5) – Λ (θα είναι πάλι 0,5) – Λ (μικρότερη από 10 N) – Σ .

1.36 Σ (αφού $T_{\sigma\tau, \max} = \mu_{\sigma\tau} N = \mu_{\sigma\tau} mg = 50 \text{ N}$, για δύναμη $F = 30 \text{ N}$ προκύπτει $T_{\sigma\tau} = 30 \text{ N}$) – Λ (είναι ίση με 50 N, όσο δηλαδή το μέτρο της $T_{\sigma\tau, \max}$) – Σ (είναι $T = \mu mg = 40 \text{ N}$ και $\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$) – Σ (γιατί τότε $\Sigma F = 0$, αφού $T = 40 \text{ N}$) – Σ (γιατί ασκείται η τριβή ολίσθησης).

1.37 Λ (η στατική τριβή εμφανίζεται όταν ασκηθεί κάποια δύναμη που τείνει να κινήσει το σώμα) – Λ (ασκείται στατική τριβή που έχει ίδιο μέτρο με το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$) – Λ (ασκείται τριβή ολίσθησης με μέτρο ίδιο με αυτό της δύναμης $\vec{F}$) – Λ (είναι παράλληλη στην κατεύθυνση κίνησης) – Σ .

1.38 Σωστή απάντηση είναι η α . Για την ισορροπία του σώματος ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = T_{\sigma\tau, \max} \Rightarrow mg \mu 30^\circ = T_{\sigma\tau, \max} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y = N \Rightarrow N = mg \sin 30^\circ \quad (2)$$

Αφού $T_{\sigma\tau, \max} = \mu_{\sigma\tau} N$, λόγω των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$mg \mu 30^\circ = \mu_{\sigma\tau} mg \sin 30^\circ \Rightarrow \mu_{\sigma\tau} = \frac{\mu \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\mu}{\sqrt{3}}$$

1.39 Σωστή απάντηση είναι η γ . Ισχύουν:

$$F_1 = T_{\sigma\tau, \max} = \mu_{\sigma\tau} N \quad (1)$$

$$F_2 = T = \mu N \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\mu_{\sigma\tau}}{\mu} \quad (3)$$

Όμως, $\mu = \mu_{\sigma\tau} - 10\% \mu_{\sigma\tau} = 0,9 \mu_{\sigma\tau}$.

Άρα η σχέση (3) γίνεται: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}$.

1.40 Σωστή απάντηση είναι η α . Η στατική τριβή εμφανίζεται και στις δύο πλευρές του βιβλίου. Ισχύει:

$$T_{\sigma\tau, \max} + T_{\sigma\tau, \max} = B \Rightarrow T_{\sigma\tau, \max} = \frac{mg}{2} \quad (1)$$

Επίσης:

$$F = N \Rightarrow N = 4B \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } T_{\sigma\tau, \max} &= \mu_{\sigma\tau} N \Rightarrow \frac{mg}{2} = \mu_{\sigma\tau} 4mg \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu_{\sigma\tau} = \frac{1}{4} = 0,25 \end{aligned}$$

1.41 Σωστή απάντηση είναι η α. Για να μη γλιστρούει το σώμα Σ, πρέπει:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau, \max} \Rightarrow T_{\sigma\tau} \leq \mu_{\sigma\tau} N \quad (1)$$

Για το σώμα ισχύει στον κατακόρυφο άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = B \quad (2)$$

ενώ στον οριζόντιο άξονα:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow N = ma \quad (3)$$

(N η κάθετη δύναμη που ασκείται στο σώμα λόγω επαφής με το φορηγό). Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), προκύπτει:

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_{\sigma\tau} N \Rightarrow mg \leq \mu_{\sigma\tau} ma \Rightarrow a \geq \frac{g}{\mu_{\sigma\tau}}$$

$$\text{Επομένως } a_{\min} = \frac{g}{\mu_{\sigma\tau}}.$$

1.42 Σωστή απάντηση είναι η β. Για κάθε σώμα ισχύει: $T_1 = \mu_1 N = \mu_1 mg$

$$T_2 = \mu_2 N = \mu_2 \cdot 2mg$$

Όμως, $T_1 = T_2$, οπότε:

$$\mu_1 mg = \mu_2 \cdot 2mg \Rightarrow \mu_1 = 2\mu_2$$

1.43 Σωστή απάντηση είναι η β. Είναι:

$$T_1 = \mu N_1 = \mu mg$$

$$T_2 = \mu N_2 = \mu(mg - F_1) =$$

$$= \mu \left(mg - \frac{B}{2} \right) = \frac{\mu mg}{2}$$

Επομένως $T_1 > T_2$.

1.44 Σωστή απάντηση είναι η β. Ισχύουν:

$$T_1 = \mu mg \sin 60^\circ \text{ και } T_2 = \mu mg \sin 45^\circ$$

$$\text{Άρα } \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.45 Σωστή απάντηση είναι η γ. Για το μέτρο της δύναμης F_A που ασκείται στο σώμα ισχύει:

$$F_A = \sqrt{N^2 + T^2} \quad (1)$$

Όμως, $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B$ και $T = \mu N = \mu B$.

Άρα:

$$F_A = \sqrt{B^2 + (\mu B)^2} \Rightarrow F_A = B \sqrt{\mu^2 + 1}$$

1.46 Σωστή απάντηση είναι η β. Ισχύει:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg - \mu mg = ma \Rightarrow a = (1 - \mu)g$$

1.47 Σωστή απάντηση είναι η α. Αρχικά, όταν το σώμα κινείται με $v = \text{σταθ.}$, ισχύει: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T \Rightarrow F = \mu mg$. Αν διπλασιαστεί το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, το σώμα επιταχύνεται και ισχύει:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow 2F - T = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\mu mg - \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g$$

1.48 Σωστή απάντηση είναι η β. Αρχικά, όταν το σώμα κινείται με $v = \text{σταθ.}$, ισχύει: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = T \Rightarrow F = \mu mg$. Αντιστρέφοντας τη δύναμη $\vec{F}$, το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται με επιβράδυνση μέτρου:

$$\Sigma F_x' = ma' \Rightarrow F + T = ma' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu mg + \mu mg = ma' \Rightarrow a' = 2\mu g$$

1.49 Σωστή απάντηση είναι η γ. Για την επιταχυνόμενη κίνηση ισχύει:

$$\Sigma F_x = ma_1 \Rightarrow F - T = ma_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg - \mu mg = ma_1 \Rightarrow a_1 = g(1 - \mu) \quad (1)$$

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση ισχύει:

$$\Sigma F_x' = ma_2 \Rightarrow F + T = ma_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg + \mu mg = ma_2 \Rightarrow a_2 = g(1 + \mu) \quad (2)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$a_1 - a_2 = -2g\mu \Rightarrow \mu = \frac{a_2 - a_1}{2g}$$

1.50 Σωστή απάντηση είναι η γ. Για την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του σώματος ισχύουν:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow B_x = T \Rightarrow mg \eta \mu \phi = T \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow B_y = N \Rightarrow mg \sigma \eta \nu \phi = N \quad (2)$$

Αφού $T = \mu N$, λόγω των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει:

$$mg \eta \mu \phi = \mu mg \sigma \eta \nu \phi \Rightarrow \mu = \epsilon \phi \phi$$

1.51 Σωστή απάντηση είναι η γ. Για το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ισχύει:

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - \mu mg = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - \frac{2a}{g} mg = ma \Rightarrow F = 3ma \quad (1)$$

Όταν διπλασιάζεται η δύναμη $\vec{F}$, για το μέτρο της νέας επιτάχυνσης a' θα ισχύει:

$$\begin{aligned}\Sigma F' &= ma' \Rightarrow 2F - T = ma' \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot (3ma) - \mu mg = ma' \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6ma - \frac{2a}{g}mg = ma' \Rightarrow a' = 4a\end{aligned}$$

1.52 Σωστή απάντηση είναι η β. Το μέτρο της αρχικής επιβράδυνσης a του σώματος είναι:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= ma \Rightarrow T = ma \Rightarrow \mu N = ma \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g\end{aligned}$$

Στη δεύτερη περίπτωση, το μέτρο της νέας επιβράδυνσης a' του σώματος είναι:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x' &= ma' \Rightarrow T' = ma' \Rightarrow \mu N = ma' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(F + mg) = ma' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \cdot 2mg = ma' \Rightarrow a' = 2mg \Rightarrow a' = 2a\end{aligned}$$

1.53 Σωστή απάντηση είναι η γ. Το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει είναι ίσο με:

$$S = \frac{v_0^2}{2a_1} \quad (1)$$

(με απόδειξη), όπου για το μέτρο της επιβράδυνσης ισχύει:

$$\Sigma F_x = ma_1 \Rightarrow \mu_1 mg = ma_1 \Rightarrow a_1 = \mu g$$

Ομοίως, για το άλλο οριζόντιο επίπεδο ισχύει:

$$S' = \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{v_0^2}{2\mu_2 g} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και

$$(1), \text{ προκύπτει: } \frac{S'}{S} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow S' = \frac{5}{3}S.$$

1.54 Σωστή απάντηση είναι η α. Ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι να σταματήσει είναι

$\Delta t = \frac{v_0}{a}$ (με απόδειξη), όπου $a = \mu g$ (από $\Sigma F_x = ma$). Στο άλλο οριζόντιο επίπεδο ο χρόνος $\Delta t'$ θα είναι ίσος με:

$$\Delta t' = \frac{v'_0}{a'} = \frac{2v_0}{2mg} = \frac{v_0}{a} = \Delta t$$

1.55 Σωστή απάντηση είναι η γ. Τα δύο σώματα κινούνται με ίδιου μέτρου επιβράδυνση. Πράγματι ισχύει:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= ma \Rightarrow T = ma \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow a = \mu g\end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με τη σχέση $v = v_0 - at$,

την ίδια χρονική στιγμή t_1 θα έχουν την ίδια ταχύτητα.

1.56 Σωστή απάντηση είναι η γ. Για το σώμα

$$\begin{aligned}\Sigma_1 \text{ ισχύει: } \Sigma F_x &= ma \Rightarrow F - T_{\sigma\tau} = ma \Rightarrow \\ &\Rightarrow mg - T_{\sigma\tau} = ma\end{aligned}$$

Για το σώμα Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma F_x' = 3ma \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 3ma \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$mg - T_{\sigma\tau} = \frac{T_{\sigma\tau}}{3} \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{3}{4}mg$$

Πρέπει όμως:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau, \max} \Rightarrow \frac{3}{4}mg \leq \mu_{\sigma\tau}mg \Rightarrow \mu_{\sigma\tau} \geq \frac{3}{4}$$

Άρα ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής είναι $\mu_{\sigma\tau} = \frac{3}{4}$.

1.57 (Δες θέμα 1.10.)

Για να μην πέφτει το βιβλίο, πρέπει:

$$T_{\sigma\tau} \leq T_{\sigma\tau, \max} \quad (1)$$

Για την ισορροπία του βιβλίου ισχύουν:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2T_{\sigma\tau} = B \Rightarrow T_{\sigma\tau} = \frac{B}{2} \quad (2)$$

(η στατική τριβή εμφανίζεται και στις δύο πλευρές του βιβλίου) και

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N = F \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), προκύπτει:

$$\text{πτε: } \frac{B}{2} \leq \mu_{\sigma\tau}N \Rightarrow \frac{mg}{2} \leq \mu_{\sigma\tau}F \Rightarrow F \geq \frac{mg}{2\mu_{\sigma\tau}}.$$

Για την ελάχιστη δύναμη $\vec{F}$ ισχύει:

$$F_{\min} = \frac{mg}{2\mu_{\sigma\tau}}$$

Επομένως:

$$\mu_{\sigma\tau} = \frac{mg}{2F_{\min}} = \frac{0,8 \cdot 10}{2 \cdot 5} \Rightarrow \mu_{\sigma\tau} = 0,8$$

1.58 α. Η οριακή τριβή είναι:

$$T_{\sigma\tau, \max} = \mu_{\sigma\tau}N = \mu_{\sigma\tau}mg = 20 \text{ N}$$

Για να αρχίσει να κινείται το σώμα, πρέπει $F \geq T_{\sigma\tau, \max} \Rightarrow F \geq 20 \text{ N}$, πράγμα που συμβαίνει **τη χρονική στιγμή $t_1 = 4 \text{ s}$.**

β. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 6 \text{ s}$ το σώμα κινείται και η τριβή που του ασκείται είναι η τριβή ολίσθησης, για την οποία ισχύει: $T = \mu N = \mu mg = 15 \text{ N}$. Η στιγμιαία επιτάχυνση του σώματος (αφού η δύναμη $\vec{F}$ δεν είναι σταθερή) είναι:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow 30 - 15 = 5a \Rightarrow a = 3 \text{ m/s}^2$$

1.59 α. Είναι:

$$T_{\sigma\tau} = \mu_{\sigma\tau} N = \mu_{\sigma\tau} mg = (0,3 \cdot 2 \cdot 10) \text{ N} \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 6 \text{ N}$$

β. Η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg = (0,25 \cdot 2 \cdot 10) \text{ N} = 5 \text{ N}$$

Όταν ασκηθεί δύναμη μέτρου $F = T_{\sigma\tau} = 6 \text{ N}$, το σώμα αποκτά επιτάχυνση a , για την οποία ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow 6 - 5 = 2a \Rightarrow a = 0,5 \text{ m/s}^2$$

1.60 (Δες θέμα 1.11.)

α. Ισχύουν:

$$F = T_{\sigma\tau, \max} = 4 \text{ N}$$

$$T_{\sigma\tau, \max} = \mu_{\sigma\tau} N = \mu_{\sigma\tau} mg \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu_{\sigma\tau} = \frac{T_{\sigma\tau, \max}}{mg} = \frac{4}{0,8 \cdot 10} \Rightarrow \mu_{\sigma\tau} = 0,5$$

β. Ισχύουν:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F' = T = 3 \text{ N}$$

$$T = \mu N = \mu mg \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{3}{0,8 \cdot 10} \Rightarrow \mu = \frac{3}{8}$$

1.61 (Δες θέμα 1.12.)

Το σώμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, αφού η εξίσωση κίνησής του είναι της μορφής $x = vt$. Επομένως:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = T \Rightarrow \\ \Rightarrow F = \mu mg = (0,5 \cdot 0,5 \cdot 10) \text{ N} \Rightarrow \\ \Rightarrow F = 2,5 \text{ N}$$

1.62 (Δες θέμα 1.12.)

Όπως στην προηγούμενη άσκηση:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = T \Rightarrow F = \mu mg \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu = \frac{F}{mg} = \frac{1}{0,4 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,25$$

1.63 (Δες θέμα 1.12.)

Για τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξί κιβωτίου και οριζόντιου επιπέδου ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F = T \Rightarrow F = \mu mg \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu = \frac{F}{mg} = \frac{24}{12 \cdot 10} = \frac{24}{120} \Rightarrow \mu = 0,2$$

Για να κινείται και πάλι το κιβώτιο με σταθερή ταχύτητα όταν το γεμίσουμε με

άμμο ($m' = 12 \text{ kg} + 8 \text{ kg} = 20 \text{ kg}$), θα πρέπει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F' = T' \Rightarrow \\ \Rightarrow F' = \mu m' g = (0,2 \cdot 20 \cdot 10) \text{ N} \Rightarrow F' = 40 \text{ N}$$

1.64 (Δες θέματα 1.13 και 1.15.)

α. Το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Ισχύει:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow 45 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3^2 \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2$$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, θα είναι:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow F - \mu mg = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow 36 - 0,2 \cdot m \cdot 10 = m \cdot 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow m = 3 \text{ kg}$$

β. Ισχύει: $F_A = \sqrt{T^2 + N^2}$, όπου:

$$T = \mu mg = 6 \text{ N} \text{ και} \\ N = B = mg = 30 \text{ N.}$$

Άρα $F_A = \sqrt{936} \text{ N}$.

1.65 α. Για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

του σώματος ισχύουν: $x = \frac{1}{2} at^2$ και $v = at$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις αυτές, προκύπτει: $v^2 = 2ax$. Επομένως η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα είναι:

$$v^2 = 2ax \Rightarrow a = \frac{v^2}{2x} = \frac{8^2}{2 \cdot 16} \text{ m/s}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

β. Αν δεν υπάρχει τριβή, η επιτάχυνση a' του σώματος σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα είναι:

$$\Sigma F = ma' \Rightarrow a' = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F}{m} = \frac{20}{5} = 4 \text{ m/s}^2$$

Επειδή $a' \neq a$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει εκτός από τη δύναμη $\vec{F}$ και κάποια άλλη δύναμη, η τριβή.

γ. Ισχύει: $\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow$

$$\Rightarrow 20 - T = 5 \cdot 2 \Rightarrow T = 10 \text{ N}$$

δ. Επίσης: $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{10}{5 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,2$$

1.66 α. Το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Σύμφωνα με τη σχέση $v = at$, η επιτάχυνσή του είναι:

$$20 = a \cdot 5 \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow 200 - T = 20 \cdot 4 \Rightarrow \mathbf{T = 120\text{ N}}$$

β. Ισχύει: $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{120}{20 \cdot 10} \Rightarrow \mathbf{\mu = 0,6}$

γ. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ είναι:
 $F_1 = 10\%F = 0,1 \cdot 200\text{ N} = 20\text{ N}$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, θα ισχύει:

$$\Sigma F = ma' \Rightarrow F - F_1 - T = ma' \Rightarrow \\ \Rightarrow 200 - 20 - 120 = 20a' \Rightarrow \\ \Rightarrow 60 = 20a' \Rightarrow \mathbf{a' = 3\text{ m/s}^2}$$

1.67 (Δες θέμα 1.13.)

α. Για την επιταχυνόμενη κίνηση ισχύει:

$$v = v_0 + at \Rightarrow 3v_0 = v_0 + at \Rightarrow \\ \Rightarrow 2v_0 = at \Rightarrow 2 \cdot 3 = a \cdot 6 \Rightarrow \mathbf{a = 1\text{ m/s}^2}$$

β. Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow 20 - T = 2 \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{T = 18\text{ N}}$$

γ. Είναι: $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{18}{2 \cdot 10} \Rightarrow \mathbf{\mu = 0,9}$

δ. Είναι: $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 =$
 $= \left(3 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \mathbf{x = 27,5\text{ m}}$

1.68 (Δες θέμα 1.13.)

α. Η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg = (0,2 \cdot 2 \cdot 10)\text{ N} = 4\text{ N}$$

Το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow 10 - 4 = 2a \Rightarrow \mathbf{a = 3\text{ m/s}^2}$$

β. Είναι: $x = v_0 t_1 + \frac{1}{2} at_1^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 12 = v_0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^2 \Rightarrow \mathbf{v_0 = 3\text{ m/s}}$

γ. Είναι: $v_1 = v_0 + at_1 = (3 + 3 \cdot 2)\text{ m/s} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mathbf{v_1 = 9\text{ m/s}}$

1.69 α. Η επιτάχυνση του σώματος είναι:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(12 - 8)}{(2 - 0)}\text{ m/s}^2 \Rightarrow \mathbf{a = 2\text{ m/s}^2}$$

Άρα: $\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow$

$$\Rightarrow F - \mu mg = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 - 0,25 \cdot m \cdot 10 = m \cdot 2 \Rightarrow \mathbf{m = 4\text{ kg}}$$

β. Είναι $F_A = \sqrt{T^2 + N^2}$, όπου:

$$T = \mu mg = (0,25 \cdot 4 \cdot 10)\text{ N} = 10\text{ N και}$$

$$N = mg = 40\text{ N.}$$

Επομένως: $F_A = \sqrt{10^2 + 40^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow F_A = \sqrt{1.700} = 10\sqrt{17}\text{ N} =$
 $= 10 \cdot 4,1\text{ N} \Rightarrow \mathbf{F_A = 41\text{ N}}$

1.70 α. Το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου:

$$\frac{1}{2} a = 2 \Rightarrow \mathbf{a = 4\text{ m/s}^2}$$

Άρα η συνισταμένη δύναμη είναι:

$$\Sigma F = ma = (1 \cdot 4)\text{ N} \Rightarrow \mathbf{\Sigma F = 4\text{ N}}$$

β. Ισχύει: $\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow$
 $\Rightarrow F - \mu mg = ma \Rightarrow F = \mu mg + ma =$
 $= (0,8 \cdot 1 \cdot 10 + 1 \cdot 4)\text{ N} \Rightarrow \mathbf{F = 12\text{ N}}$

1.71 Η τριβή ολίσθησης είναι:

$$T = \mu mg = (0,2 \cdot 3 \cdot 10)\text{ N} = 6\text{ N}$$

και η αρχική ταχύτητα:

$$v_0 = 108\text{ km/h} = 30\text{ m/s}$$

α. Το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - T = ma \Rightarrow \\ \Rightarrow 12 - 6 = 3a \Rightarrow \mathbf{a = 2\text{ m/s}^2}$$

Επομένως:

$$v_1 = v_0 + at_1 = (30 + 2 \cdot 1)\text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v_1 = 32\text{ m/s}}$$

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} at_1^2 =$$

$$= \left(30 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 31\text{ m}}$$

β. Το σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Ισχύει:

$$\Sigma F = ma' \Rightarrow F + T = ma' \Rightarrow \\ \Rightarrow 12 + 6 = 3a' \Rightarrow \mathbf{a' = 6\text{ m/s}^2}$$

Επομένως:

$$v_1 = v_0 - a't_1 = (30 - 6 \cdot 1)\text{ m/s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v_1 = 24\text{ m/s}}$$

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a't_1^2 =$$

$$= \left(30 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 27\text{ m}}$$

1.72 α. Είναι $t_{\text{ολ}} = \frac{v_0}{a}$ (με απόδειξη). Άρα:

$$5 = \frac{10}{a} \Rightarrow \mathbf{a = 2\text{ m/s}^2}$$

β. Ισχύει: $\Sigma F = ma \Rightarrow F + T = ma \Rightarrow$
 $\Rightarrow 20 + T = 30 \cdot 2 \Rightarrow T = 40 \text{ N}$

γ. Είναι: $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$
 $\Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{40}{30 \cdot 10} \Rightarrow \mu = \frac{4}{30}$

δ. Είναι: $x_{ολ} = \frac{v_o^2}{2a}$ (με απόδειξη). Άρα:
 $x_{ολ} = \frac{10^2}{2 \cdot 2} \text{ m} = \frac{100}{4} \text{ m} \Rightarrow x_{ολ} = 25 \text{ m}$

1.73 (Δες θέμα 1.14.)

α. Το σώμα επιβραδύνεται με επιβραδυν-
ση μέτρου a .

Ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow T = ma \Rightarrow \mu mg = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \mu g = (0,2 \cdot 10) \text{ m/s}^2 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

Επομένως για την αρχική ταχύτητα
ισχύει:

$$x = v_o t - \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = v_o \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1^2 \Rightarrow v_o = 10 \text{ m/s}$$

β. Θα έπρεπε: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F = T = \mu mg =$
 $= (0,2 \cdot 2,5 \cdot 10) \text{ N} \Rightarrow F = 5 \text{ N}$

1.74 α. Το σώμα επιβραδύνεται με επιβραδυν-
ση μέτρου a . Ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow T = ma \Rightarrow \frac{1}{20} B = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{20} mg = ma \Rightarrow a = \frac{9}{20} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

Επομένως:

$$v = v_o - at \Rightarrow 10 = 20 - 0,5t \Rightarrow t = 20 \text{ s}$$

β. Το σώμα σταματάει μετά από χρόνο

$$t_{ολ} = \frac{v_o}{a} = \frac{20}{0,5} \text{ s} = 40 \text{ s}. \text{ Μέχρι να στα-}$$

ματήσει, διανύει απόσταση:

$$x_{40} = \frac{v_o^2}{2a} = \frac{20^2}{2 \cdot 0,5} \text{ m} \Rightarrow x_{40} = 400 \text{ m}$$

Μέχρι το 39ο δευτερόλεπτο μετατοπί-

$$\text{ζεται κατά: } x_{39} = \left(v_o t - \frac{1}{2} a t^2 \right) =$$

$$= \left(20 \cdot 39 - \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 39^2 \right) \text{ m} = 399,75 \text{ m}$$

Άρα στο τελευταίο δευτερόλεπτο μετα-
τοπίζεται κατά:

$$\Delta x = x_{40} - x_{39} = 400 \text{ m} - 399,75 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = 0,25 \text{ m}$$

1.75 Το μέτρο της επιβραδυνσης a του σώμα-
τος είναι:

$$t_{ολ} = \frac{v_o}{a} \Rightarrow a = \frac{v_o}{t_{ολ}} = \frac{20}{2} \text{ m/s}^2 = 10 \text{ m/s}^2$$

Για το μέτρο της τριβής ολίσθησης ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F + T = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 + T = 5 \cdot 10 \Rightarrow T = 40 \text{ N}$$

Άρα ο συντελεστής τριβής ολίσθησης
είναι:

$$T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{40}{5 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,8$$

1.76 α. Το σώμα εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμε-
νη κίνηση. Ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow T - F = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T - 6 = 1 \cdot 3 \Rightarrow T = 9 \text{ N}$$

β. Είναι:

$$T = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{9}{3 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,3$$

γ. Θα έπρεπε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 + F = T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 = T - F \Rightarrow F_1 = 3 \text{ N}$$

1.77 α. Η τριβή ολίσθησης είναι:

$$T = \mu N = \mu mg = (0,1 \cdot 10 \cdot 10) \text{ N} = 10 \text{ N}$$

Επειδή $T > F$, το σώμα εκτελεί ομαλά
επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβραδυν-
ση μέτρου:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow T - F = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 - 8 = 10a \Rightarrow a = 0,2 \text{ m/s}^2$$

β. Είναι: $x_{ολ} = \frac{v_o^2}{2a}$ (με απόδειξη). Άρα:

$$x_{ολ} = \frac{20^2}{2 \cdot 0,2} \text{ m} \Rightarrow x_{ολ} = 1.000 \text{ m}$$

1.78 (Δες θέμα 1.15.)

Το μέτρο της τριβής είναι:

$$T = \mu N = \mu mg = (0,1 \cdot 5 \cdot 10) \text{ N} = 5 \text{ N}$$

α. Ισχύει: $\Sigma F = ma \Rightarrow F_1 + F_2 - T = ma \Rightarrow$
 $\Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$

β. Ισχύει: $\Sigma F' = ma' \Rightarrow F_1 - F_2 - T = ma' \Rightarrow$
 $\Rightarrow a' = 2 \text{ m/s}^2$

γ. Είναι:

$$v_1 = at = (4 \cdot 4) \text{ m/s} \Rightarrow v_1 = 16 \text{ m/s}$$

(ερώτημα α) και

$$v_2 = a't = (2 \cdot 4) \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 8 \text{ m/s}$$

(ερώτημα β).

1.79 α. Ισχύει: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_1 - F_2 - T = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow T = 30 \text{ N}$

Επομένως: $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{30}{8 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,375$$

β. Το σώμα θα εκτελέσει επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου a_1 .

Ισχύει: $\Sigma F = ma_1 \Rightarrow F_2 + T = ma_1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 10 + 30 = 8a_1 \Rightarrow a_1 = 5 \text{ m/s}^2$

Μετατοπίζεται κατά:

$$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2 =$$

$$= \left(20 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 \right) \text{ m} \Rightarrow x_1 = 40 \text{ m}$$

γ. Το σώμα θα εκτελέσει επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου a_2 . Ισχύει:

$$\Sigma F' = ma_2 \Rightarrow F_1 - T = ma_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 - 30 = 8a_2 \Rightarrow a_2 = 1,25 \text{ m/s}^2$$

Μετατοπίζεται κατά:

$$x_2 = v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 =$$

$$= \left(20 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 2^2 \right) \text{ m} \Rightarrow x_2 = 42,5 \text{ m}$$

1.80 α. • Αφού το σώμα σταματάει μετά από 4 s, έχει επιβράδυνση μέτρου a , για την οποία ισχύει:

$$t_{\text{ολ}} = \frac{v_0}{a} \Rightarrow 4 = \frac{20}{a} \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

Επομένως:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_1 + F_2 + T = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + F_2 + T = 4 \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 + T = 16 \text{ N} \quad (1)$$

• Αφού το σώμα θα διπλασίαζε την ταχύτητά του μετά από 20 s, για την επιτάχυνση a' της κίνησης θα ίσχυε:

$$v = v_0 + a't \Rightarrow 40 = 20 + a' \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a' = 1 \text{ m/s}^2$$

Επομένως:

$$\Sigma F' = ma' \Rightarrow F_2 - F_1 - T = ma' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 - 4 - T = 4 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 - T = 8 \text{ N} \quad (2)$$

Με επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτουν:

$$F_2 = 12 \text{ N} \quad \text{και} \quad T = 4 \text{ N}$$

β. Είναι:

$$T = \mu mg \Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{4}{4 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,1$$

1.81 α. Είναι:

$$v = v_0 - at \Rightarrow 6 = 12 - a \cdot 3 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

β. Ισχύει:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow T + F_2 - F_1 = ma \quad (1)$$

$$\text{όπου } T = \mu mg = (0,1 \cdot 2 \cdot 10) \text{ N} = 2 \text{ N.}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1), προκύπτει:

$$2 + F_2 - 6 = 2 \cdot 2 \Rightarrow F_2 = 8 \text{ N}$$

1.82 (Δες θέμα 1.15.)

α. Είναι:

$$v = at \Rightarrow 2 = a \cdot 2 \Rightarrow a = 1 \text{ m/s}^2$$

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_2 - F_1 - T = ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - 3 - T = 2,5 \cdot 1 \Rightarrow T = 2,5 \text{ N}$$

β. Ισχύει: $T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu = \frac{T}{mg} = \frac{2,5}{2,5 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,1$$

1.83 (Δες θέμα 1.16.)

α. Η τριβή που ασκείται στο σώμα είναι:

$$T = \mu N = \mu mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0,25 \cdot 4 \cdot 10) \text{ N} = 10 \text{ N}$$

Η επιτάχυνση με την οποία κινείται το σώμα στην επιταχυνόμενη κίνηση είναι:

$$\Sigma F = ma_1 \Rightarrow F - T = ma_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 - 10 = 4a_1 \Rightarrow a_1 = 5 \text{ m/s}^2$$

Επομένως μετατοπίζεται κατά:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 \right) \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 40 \text{ m}$$

β. Η αρχική ταχύτητα της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι:

$$v_0 = a_1 t_1 = (5 \cdot 4) \text{ m/s} \Rightarrow v_0 = 20 \text{ m/s}$$

Το μέτρο της επιβράδυνσης a_2 είναι:

$$\Sigma F' = ma_2 \Rightarrow F + T = ma_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 + 10 = 4a_2 \Rightarrow a_2 = 10 \text{ m/s}^2$$

Επομένως η χρονική διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι:

$$v = v_0 - a_2 t_2 \Rightarrow 0 = 20 - 10t_2 \Rightarrow t_2 = 2 \text{ s}$$

Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι:

$$t_{\text{ολ}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 6 \text{ s}$$

γ. Θα έπρεπε να ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F' = F + T \Rightarrow F' = 40 \text{ N}$$

1.84 (Δες θέμα 1.16.)

α. Στο χρονικό διάστημα από 0 έως t_1 η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο:

$T_1 = \mu N = \mu mg = (0,2 \cdot 2 \cdot 10) \text{ N} = 4 \text{ N}$
και το σώμα κινείται με επιτάχυνση μέ-
τρου a_1 . Ισχύει:

$$\Sigma F = ma_1 \Rightarrow F - T_1 = ma_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 - 4 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 3 \text{ m/s}^2$$

Επομένως η χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$v_1 = a_1 t_1 \Rightarrow 12 = 3t_1 \Rightarrow t_1 = 4 \text{ s}$$

β. Από τη χρονική στιγμή t_1 και μετά το μέτρο της τριβής ολίσθησης αλλάζει και γίνεται ίσο με:

$$T' = \mu N' = \mu (B + F) = \mu (mg + F) =$$

$$= 0,2 \cdot (2 \cdot 10 + 10) \text{ N} = 6 \text{ N}$$

Το σώμα με την επίδραση της τριβής T' εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου a_2 . Ισχύει:

$$\Sigma F' = ma_2 \Rightarrow T' = ma_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = 2a_2 \Rightarrow a_2 = 3 \text{ m/s}^2$$

γ. Στην επιταχυνόμενη κίνηση μετατοπι-
ζεται κατά:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 \right) \text{ m} = 24 \text{ m}$$

και στην επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να σταματήσει μετατοπίζεται κατά:

$$x_2 = \frac{v_0^2}{2a_2} = \frac{12^2}{2 \cdot 3} \text{ m} \Rightarrow x_2 = 24 \text{ m}$$

Η συνολική μετατόπιση είναι:

$$x_{\text{ολ}} = x_1 + x_2 \Rightarrow x_{\text{ολ}} = 48 \text{ m}$$

1.85

α. Για την τελική ταχύτητα v_0 της επιτα-
χυνόμενης κίνησης (και αρχική της επι-
βραδυνόμενης) ισχύει:

$$v_0^2 = 2a_1 x_1 \quad (1)$$

(με απόδειξη), όπου:

$$x_1 = 50 \text{ m και } a_1 = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F - T}{m}.$$

Για τη συνολική μετατόπιση $x_2 = 100 \text{ m}$
της επιβραδυνόμενης κίνησης ισχύει:

$$x_2 = \frac{v_0^2}{2a_2} \Rightarrow v_0^2 = 2a_2 x_2 \quad (2)$$

όπου $a_2 = \frac{\Sigma F'}{m} = \frac{T}{m} \Rightarrow a_2 = \mu g$ το μέ-
τρο της επιβράδυνσης.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$2a_1 x_1 = 2a_2 x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{F - T}{m} \right) \cdot 50 = \mu g \cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{30 - \mu mg}{m} \right) = 2\mu g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 - 50\mu = 100\mu \Rightarrow \mu = 0,2$$

β. Επιταχυνόμενη κίνηση. Είναι:

$$a_1 = \frac{F - T}{m} = \frac{F - \mu mg}{m} =$$

$$= \frac{30 - 0,2 \cdot 5 \cdot 10}{5} \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2$$

οπότε για τον χρόνο t_1 της κίνησης αυ-
τής ισχύει:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow 50 = \frac{1}{2} 4 t_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1^2 = 25 \Rightarrow t_1 = 5 \text{ s}$$

Επιβραδυνόμενη κίνηση. Είναι:

$$a_2 = \frac{T}{m} = \mu g = (0,2 \cdot 10) \text{ m/s}^2 \Rightarrow a_2 = 2 \text{ m/s}^2$$

οπότε για τον χρόνο t_2 της κίνησης αυ-
τής ισχύει: $v = v_0 - a_2 t_2$, όπου:

$$v_0 = a_1 t_1 = (4 \cdot 5) \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}.$$

$$\text{Άρα } 0 = 20 - 2t_2 \Rightarrow t_2 = 10 \text{ s}.$$

Επομένως ο συνολικός χρόνος είναι:

$$t_{\text{ολ}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{ολ}} = 15 \text{ s}$$

1.86

(Δες θέμα 1.16.)

α. Η τριβή ολίσθησης έχει για όλη την κί-
νηση μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg = (0,1 \cdot 3 \cdot 10) \text{ N} = 3 \text{ N}$$

0 - 5 s: Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη.

Ισχύει:

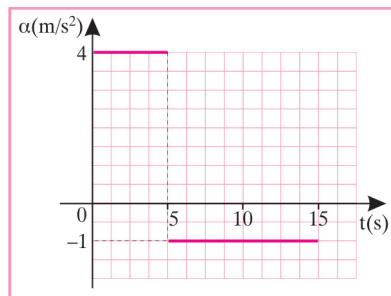
$$a_1 = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F - T}{m} = \frac{15 - 3}{3} \text{ m/s}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 4 \text{ m/s}^2$$

5 s - 10 s: Η κίνηση είναι επιβραδυνό-
μενη. Για το μέτρο a_2 της επιβράδυν-
σης ισχύει:

$$a_2 = \frac{\Sigma F'}{m} = \frac{T}{m} = \frac{3}{3} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2$$

Το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου εί-
ναι:



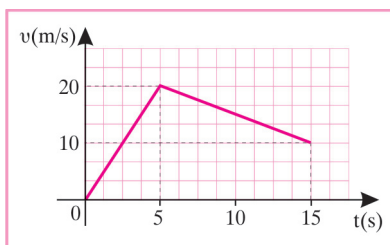
- β. Η τελική ταχύτητα της επιταχυνόμενης κίνησης είναι:

$$v_1 = a_1 t_1 = (4 \cdot 5) \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$$

και της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι:

$$v = v_1 - a_2 t_2 = (20 - 1 \cdot 10) \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου είναι:



- γ. Στην επιταχυνόμενη κίνηση μετατοπίζεται κατά:

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 \right) \text{ m} = 50 \text{ m}$$

και στην επιβραδυνόμενη κίνηση μετατοπίζεται κατά:

$$\begin{aligned} x_2 &= v_0 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \\ &= \left(20 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^2 \right) \text{ m} = 150 \text{ m} \end{aligned}$$

Η συνολική μετατόπιση είναι:

$$\begin{aligned} x_{\text{ολ}} &= x_1 + x_2 = 50 \text{ m} + 150 \text{ m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{\text{ολ}} = \mathbf{200 \text{ m}} \end{aligned}$$

- 1.87** α. Η τριβή ολίσθησης έχει για όλη την κίνηση μέτρο:

$$T = \mu N = \mu mg = (0,2 \cdot 5 \cdot 10) \text{ N} = 10 \text{ N}$$

Μετά τα 4 s το σώμα εκτελεί επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου:

$$a_2 = \frac{T - F_2}{m} = \frac{10 - 5}{5} \text{ m/s}^2 = \mathbf{1 \text{ m/s}^2}$$

Για την αρχική ταχύτητα της επιβραδυνόμενης κίνησης (τη χρονική στιγμή t_1) ισχύει:

$$\begin{aligned} x_2 &= v_0 t - \frac{1}{2} a_2 t^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 36 = v_0 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 \Rightarrow v_0 = \mathbf{19 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

- β. Η επιτάχυνση από 0 έως 3 s είναι:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_1 t \Rightarrow 19 = 3 + a_1 \cdot 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_1 = \mathbf{4 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

Επομένως για το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \Sigma F &= ma_1 \Rightarrow F_1 + F_2 - T = ma_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_1 + 5 - 10 = 5 \cdot 4 \Rightarrow \mathbf{F_1 = 25 \text{ N}} \end{aligned}$$

- γ. Είναι $\Delta x = x_2 - x_1$, όπου:

$$\begin{aligned} x_2 &= v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_1 t_2^2 = \\ &= \left(3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2^2 \right) \text{ m} = 14 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και } x_1 &= v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \\ &= \left(3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1^2 \right) \text{ m} = 5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = \mathbf{9 \text{ m.}}$$

1.88

- α. Σώμα m_1 : Η τριβή που του ασκείται έχει μέτρο $T_1 = \mu m_1 g = 4 \text{ N}$ και το σώμα αποκτά επιτάχυνση:

$$a_1 = \frac{F_1 - T_1}{m_1} = \frac{10 \text{ N} - 4 \text{ N}}{2 \text{ kg}} \Rightarrow \mathbf{a_1 = 3 \text{ m/s}^2}$$

Σώμα m_2 : Η τριβή που του ασκείται έχει μέτρο $T_2 = \mu m_2 g = 8 \text{ N}$ και το σώμα αποκτά επιτάχυνση:

$$a_2 = \frac{F_2 - T_2}{m_2} = \frac{16 \text{ N} - 8 \text{ N}}{4 \text{ kg}} \Rightarrow \mathbf{a_2 = 2 \text{ m/s}^2}$$

- β. Μέχρι το σημείο συνάντησης ισχύει:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 62,5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{2} a_2 t^2 = 62,5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{3}{2} t^2 + t^2 = 62,5 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow \mathbf{t = 5 \text{ s}} \end{aligned}$$

- γ. Είναι:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{x_1 = 37,5 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2 \right) \text{ m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{x_2 = 25 \text{ m}} \end{aligned}$$

- δ. Είναι:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 t_1 = (3 \cdot 5) \text{ m/s} \Rightarrow \mathbf{v_1 = 15 \text{ m/s}} \\ v_2 &= a_2 t_2 = (2 \cdot 5) \text{ m/s} \Rightarrow \mathbf{v_2 = 10 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

1.89

- α. Το σώμα μάζας m_1 εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με $v_0 = 12 \text{ m/s}$. Για το μέτρο a_1 της επιτάχυνσής του ισχύει:

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 64 = 12 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot 4^2 \Rightarrow a_1 = \mathbf{2 \text{ m/s}^2} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει:

$$\Sigma F = m_1 a_1 \Rightarrow F_1 - T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - T_1 = 1 \cdot 2 \Rightarrow T_1 = 6 \text{ N}$$

Επομένως ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι:

$$T_1 = \mu m_1 g \Rightarrow \mu = \frac{T_1}{m_1 g} = \frac{6}{1 \cdot 10} \Rightarrow \mu = 0,6$$

- β. Για την επιτάχυνση a_2 του σώματος μάζας m_2 ισχύει:

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \Rightarrow 64 = \frac{1}{2} a_2 \cdot 4^2 \Rightarrow a_2 = 8 \text{ m/s}^2$$

Το μέτρο της τριβής T_2 που ασκείται είναι $T_2 = \mu m_2 g = 3 \text{ N}$.

Επίσης, ισχύει:

$$\Sigma F = m_2 a_2 \Rightarrow F_2 - T_2 = m_2 a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 - 3 = \frac{1}{2} \cdot 8 \Rightarrow F_2 = 7 \text{ N}$$

- 1.90** α. Για να γίνει η μεταξύ τους απόσταση 10 m, θα πρέπει:

$$x_2 - x_1 = 8 \text{ m} \quad (1)$$

Το μέτρο της τριβής που ασκείται στο σώμα m_1 είναι:

$$T_1 = \mu m_1 g = (0,1 \cdot 2 \cdot 10) \text{ N} = 2 \text{ N}$$

ενώ στο σώμα μάζας m_2 είναι:

$$T_2 = \mu m_2 g = (0,1 \cdot 3 \cdot 10) \text{ N} = 3 \text{ N}$$

Η επιτάχυνση κάθε σώματος είναι:

$$a_1 = \frac{\Sigma F_1}{m_1} = \frac{F_1 - T_1}{m_1} = \frac{6 - 2}{2} \text{ m/s}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{\Sigma F_2}{m_2} = \frac{F_2 - T_2}{m_2} = \frac{13 - 3}{3} \text{ m/s}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = 3 \text{ m/s}^2$$

Αντικαθιστώντας τους τύπους της κίνησης στη σχέση (1), προκύπτει:

$$x_2 - x_1 = 8 \Rightarrow \frac{1}{2} a_2 t^2 - \frac{1}{2} a_1 t^2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 2t^2 = 16 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

- β. Η ταχύτητα κάθε σώματος είναι:

$$v_1 = a_1 t = (2 \cdot 4) \text{ m/s} \Rightarrow v_1 = 8 \text{ m/s}$$

$$v_2 = a_2 t = (3 \cdot 4) \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 12 \text{ m/s}$$

- 1.91** α. Η επιτάχυνση $\bar{a}$ του συστήματος (και επομένως και του Σ_1) είναι ίση με:

$$a = \frac{\Sigma F}{m_{\text{ολ}}}} = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{40 \text{ N}}{2 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} = 8 \text{ m/s}^2$$

Στο σώμα Σ_1 ασκείται η στατική τριβή, κι επειδή το σώμα Σ_1 μόλις που δεν ολι-

σθαίνει, η τριβή αυτή είναι η οριακή.

$$\text{Άρα: } \Sigma F_1 = m_1 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{στ,max}} = m_1 a = (2 \cdot 8) \text{ N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{στ,max}} = 16 \text{ N}$$

- β. Για την κατακόρυφη ισορροπία του Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = B_1 = m_1 g = 20 \text{ N}$$

Επομένως ο συντελεστής στατικής τριβής $\mu_{\text{στ}}$ είναι:

$$T_{\text{στ,max}} = \mu_{\text{στ}} N_1 \Rightarrow 16 = \mu_{\text{στ}} \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_{\text{στ}} = 0,8$$

- 1.92** α. Η επιτάχυνση του συστήματος είναι:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2^2 \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2$$

Η τριβή που ασκείται σε κάθε σώμα είναι:

$$T_1 = \mu m_1 g = (0,6 \cdot 6 \cdot 10) \text{ N} = 36 \text{ N}$$

$$T_2 = \mu m_2 g = (0,6 \cdot 4 \cdot 10) \text{ N} = 24 \text{ N}$$

Άρα, σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για όλο το σύστημα θα ισχύει:

$$\Sigma F = m_{\text{ολ}} a \Rightarrow F - T_1 - T_2 = m_{\text{ολ}} a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - 36 - 24 = 10 \cdot 2 \Rightarrow F = 80 \text{ N}$$

- β. Είναι:

$$v = at = (2 \cdot 2) \text{ m/s} \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

- 1.93** α. Τα δύο σώματα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση. Για το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_1 = m_1 a \Rightarrow B_1 - T_1 = m_1 a \Rightarrow \Rightarrow 70 - T_1 = 7a \quad (1)$$

Για το σώμα Σ_2 ισχύει:

$$\Sigma F_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 - T_{\text{ολ}} = m_2 a \quad (2)$$

όπου $T_{\text{ολ}} = \mu m_2 g = (0,5 \cdot 3 \cdot 10) \text{ N} = 15 \text{ N}$ η τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα Σ_2 .

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2), προκύπτει:

$$T_2 - 15 = 3a \quad (3)$$

Όμως, $T_1 = T_2$, οπότε από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (3) προκύπτουν:

$$a = 5,5 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = T_2 = 31,5 \text{ N}$$

- β. Το σώμα Σ_1 μετατοπίζεται κατά 11 m σε χρόνο t_1 . Ισχύει:

$$x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \Rightarrow 11 = \frac{1}{2} \cdot 5,5 t_1^2 \Rightarrow \Rightarrow t_1^2 = 4 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

Η ταχύτητα του Σ_2 είναι:

$$v_2 = at = (5,5 \cdot 2) \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 11 \text{ m/s}$$

1.94 α. Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 είναι:

$$v_1 = at_1 \Rightarrow 8 = a \cdot 2 \Rightarrow a = 4 \text{ m/s}^2$$

β. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για το σώμα Σ_2 ισχύει:

$$T - m_2g = m_2a_2 \Rightarrow T - 10 = 1 \cdot 4 \Rightarrow T = 14 \text{ N}$$

γ. Για το σώμα Σ_1 ισχύει:

$$\Sigma F_1 = ma_1 \Rightarrow F_1 - T - T_{\text{ολ}} = m_1a_1 \quad (1)$$

όπου $T_{\text{ολ}} = \mu m_1g$ η τριβή που ασκείται στο Σ_1 .

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\begin{aligned} 24 - 14 - \mu mg &= m_1a_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10 - 0,1 \cdot m_1 \cdot 10 &= 4m_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10 = 5m_1 \Rightarrow m_1 &= 2 \text{ kg} \end{aligned}$$

1.95 α. Η τριβή ολίσθησης που ασκείται σε κάθε σώμα είναι:

$$\begin{aligned} \text{Σώμα } \Sigma_1: \quad T_1 &= \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g = \\ &= (0,2 \cdot 4 \cdot 10) \text{ N} = 8 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Σώμα } \Sigma_2: \quad T_2 &= \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = \\ &= (0,4 \cdot 1 \cdot 10) \text{ N} = 4 \text{ N} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για όλο το σύστημα ισχύει:

$$\Sigma F = m_{\text{ολ}}a \Rightarrow F - T_1 - T_2 = m_{\text{ολ}}a \Rightarrow 20 - 8 - 4 = 5a \Rightarrow a = 1,6 \text{ m/s}^2$$

β. Κάθε σώμα μετατοπίζεται κατά:

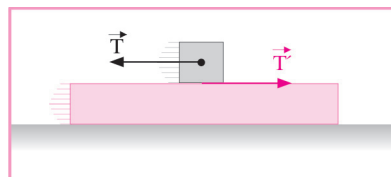
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 \cdot 2^2\right) \text{ m} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= 3,2 \text{ m} \end{aligned}$$

1.96 α. Στο σώμα Σ_2 ασκείται τριβή:

$$T = \mu m_2g = (0,4 \cdot 1 \cdot 10) \text{ N} = 4 \text{ N}$$

αντίθετα από τη φορά της κίνησής του, οπότε εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιβράδυνση μέτρου a_2 . Ισχύει:

$$a_2 = \frac{\Sigma F_2}{m_2} = \frac{T_2}{m_2} = \frac{4}{1} \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m/s}^2$$



Στο σώμα Σ_1 ασκείται η δύναμη $T' = 4 \text{ N}$ ($T = T'$ λόγω δράσης-αντίδρασης), οπότε εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου a_1 , για την οποία ισχύει:

$$a_1 = \frac{\Sigma F_1}{m_1} = \frac{T'}{m_1} = \frac{4}{4} \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2$$

β. Όταν αποκτούν την ίδια ταχύτητα:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \Rightarrow a_1t = v_0 - a_2t \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 \cdot t &= 2 - 4t \Rightarrow 5t = 2 \Rightarrow t = 0,4 \text{ s} \end{aligned}$$

Η κοινή ταχύτητα των σωμάτων είναι:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \Rightarrow a_1t = (1 \cdot 0,4) \text{ m/s} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_1 &= 0,4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

γ. Το σώμα Σ_1 μετατοπίζεται κατά:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}a_1t^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,4^2\right) \text{ m} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= 0,08 \text{ m} \end{aligned}$$

Το σώμα Σ_2 μετατοπίζεται κατά:

$$\begin{aligned} x_2 &= v_0t - \frac{1}{2}a_2t^2 = \\ &= \left(2 \cdot 0,4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,4^2\right) \text{ m} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_2 &= 0,48 \text{ m} \end{aligned}$$