ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικής Παιδείας

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

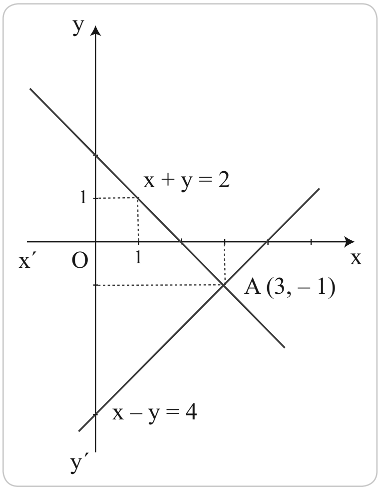
1.1 Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

i. $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (3, –1).



Οι ευθείες $x+y=2$ και $x-y=4$ τέμνονται στο σημείο Α(3, –1).

2. i. $\begin{cases} \dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{8} \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=7y \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x-7y=0 \\ x+y=45 \end{array}\right|\begin{array}{l} \\ \cdot 7 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-7y=0 \\ 7x+7y=315 \end{cases}.$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $15x=315 \Leftrightarrow x=\dfrac{315}{15} \Leftrightarrow x=24$

και από την εξίσωση $x+y=45$ προκύπτει $y=45-21=24$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (21, 24).

ii. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4} \\ 4x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4=3y-6 \\ 4x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=-2 & ,\ (1) \\ 4x+3y=8 & ,\ (2) \end{cases}.$

Με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $8x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$.

Με αφαίρεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $6y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{3}\right)$.

3. i. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών και εκτελώντας τις πράξεις στις εξισώσεις του συστήματος προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 12y = 15 \\ 8x - 12y = 72 \end{cases}.$$

Με πρόθεση έχουμε:

$$29x = 87 \Leftrightarrow x = \frac{87}{29} \Leftrightarrow x = 3.$$

Για $x = 3$ η εξίσωση $7x + 4y = 5$ γίνεται:

$$7 \cdot 3 + 4y = 5 \Leftrightarrow 4y = -21 + 5 \Leftrightarrow 4y = -16, \text{ οπότε } y = -4.$$

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3, -4)$.

ii. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών και εκτελώντας τις πράξεις στις εξισώσεις του συστήματος προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 46 & , (1) \\ x + 2y = 9 & , (2) \end{cases}.$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x = 9 - 2y$ και έχουμε:

$$8(9 - 2y) + 3y = 46 \Leftrightarrow 72 - 16y + 3y = 46 \Leftrightarrow 13y = 26 \Leftrightarrow y = 2.$$

Η (2) για $y = 2$ γίνεται $x + 2 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow x = 5$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(5, 2)$.

4. i. Το σύστημα $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{x}{3} - y = -2 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ x - 3y = -6 \end{cases}$.

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

ii. Το σύστημα $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$.

Άρα, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $\left(\kappa, \frac{\kappa + 2}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

5. **i.** Έχουμε:

- $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0,$

- $D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 7 - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39,$

- $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$

Τότε $x = \frac{Dx}{D} = \frac{-39}{-13} = 3$ και $y = \frac{Dy}{D} = \frac{-13}{-13} = 1.$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (3, 1).

ii. Το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = -1 \end{cases}.$

Είναι:

- $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11 \neq 0,$
- $D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22,$
- $D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11.$

Τότε $x = \frac{Dx}{D} = \frac{22}{11} = 2$ και $y = \frac{Dy}{D} = \frac{-11}{11} = -1.$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (2, –1).

6. **i.** • Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0,$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii. • Είναι $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0.$ Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$$

και επομένως έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

iii. Είναι $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0.$ Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -9x - 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x + y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

7. i. • Είναι $D=\begin{vmatrix}\sqrt{3}-1 & 2\\ 1 & \sqrt{3}+1\end{vmatrix}=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-2=2-2=0.$

Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2\\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=-1-\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2\\ \left(\sqrt{3}-1\right)x+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)y=-\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2\\ \left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2\end{cases}.$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής:

$$\left(\left(\sqrt{3}+1\right)(\kappa+1),\ \kappa\right),\ \ \kappa\in\mathbb{R}\Big).$$

ii. Είναι $D=\begin{vmatrix}\sqrt{3}+1 & 4\\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}-1\end{vmatrix}=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-2=2-2=0.$

Το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=7\\ x+2\left(\sqrt{3}-1\right)y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=7\\ \left(\sqrt{3}+1\right)x+2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)y=2\left(\sqrt{3}+1\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=7\\ \left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=2\left(\sqrt{3}+1\right)\end{cases}.$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

8. i. Λύνουμε μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο π.χ. την πρώτη.

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\omega = 3x - 2y - 11$, (4).

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

- $2x-5y-2\left(3x-2y-11\right)=3\Leftrightarrow 2x-5y-6x+4y+22=3$

$$\Leftrightarrow -4x-y=-19\Leftrightarrow 4x+y=19,\ (5).$$

- $5x+y-2\left(3x-2y-11\right)=33\Leftrightarrow 5x+y-6x+4y+22=33$

$$\Leftrightarrow -x+5y=11\Leftrightarrow x-5y=-11,\ (6).$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα:

$$\begin{cases}4x+y=19\\ x-5y=-11\end{cases},$$

από τη λύση του οποίου, κατά τα γνωστά, βρίσκουμε $x = 4$ και $y = 3$.

Με αντικατάσταση των τιμών x και y στην (4) βρίσκουμε $\omega = -5$.

Άρα, η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(x, y, \omega) = (4, 3, -5)$.

ii. Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x = 3y - \omega + 2$, (4).

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

- $5(3y-\omega+2)-y+32=4 \Leftrightarrow 15y-5\omega+10-y+32=4$

$$\Leftrightarrow 14y-2\omega=-\ 6 \Leftrightarrow 7y-\omega=-3,\ (5).$$

- $3(3y-\omega+11)-2y+2\omega=2 \Leftrightarrow 9y-3\omega+6-2y+2\omega=2$

$$\Leftrightarrow 7y-\omega=-4,\ (6).$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα $\begin{cases} 7y-\omega=-3 \\ 7y-\omega=-4 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

Άρα, το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

iii. Μετά την απαλοιφή παρονομαστών το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 2x+y-4\omega=6 \\ 3x+2y+2\omega=10 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases}$.

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 4\omega - 2x + 6$, (4).

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται:

- $3x+2-(4\omega-2x+6)+2\omega=10 \Leftrightarrow 3x+8\omega-4x+12+2\omega=10$

$$\Leftrightarrow -x+10\omega=-2 \Leftrightarrow x-10\omega=2,\ (5).$$

- $5x+3(4\omega-2x+6)-2\omega=16 \Leftrightarrow 5x+12\omega-6x+18-2\omega=16$

$$\Leftrightarrow -x+10\omega=-2 \Leftrightarrow x-10\omega=2,\ (6).$$

Οι (5), (6) αποτελούν το σύστημα:

$$\begin{cases} x-10\omega=2 \\ x-10\omega=2 \end{cases},$$

που έχει άπειρες λύσεις της μορφής $x = 10\kappa + 2$, με $\omega = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Από την (4) έχουμε $y = 4\kappa - 2(10\kappa + 2) + 6 = -16\kappa + 2$.

Άρα, το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$$(x, y, \omega) = (10\kappa + 2,\ -16\kappa + 2,\ \kappa),\ \kappa \in \mathbb{R}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας (ε_1). Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία (0, 2) και (4, 0) έχουμε:

$$\begin{cases} 2=\alpha\cdot 0+\beta \\ 0=\alpha\cdot 4+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ 4\alpha+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=2 \\ \alpha=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Άρα (ε_1): $y=-\frac{1}{2}x+2$.

Αν, τώρα, η $y = \gamma x + \delta$ είναι η εξίσωση της (ε_2), τότε επειδή διέρχεται από τα σημεία $(0, -1)$ και $(1, 0)$ έχουμε:

$$\begin{cases} -1=\gamma\cdot 0+\delta \\ 0=\gamma\cdot 1+\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=-1 \\ \gamma=1 \end{cases}.$$

Άρα (ε_2): $y = x - 1$.

ii. Οι εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ορίζουν το σύστημα $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=x-1 \end{cases}$,

του οποίου η λύση, όπως φαίνεται και από το σχήμα, είναι το ζεύγος $(2, 1)$.

2. Έστω x ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων, τότε από τα δεδομένα έχουμε:

$$\begin{cases} x+y=26 \\ 2x+3y=68 \end{cases},$$

η λύση του οποίου είναι το ζεύγος $(x, y) = (10, 16)$.

Άρα, υπάρχουν 10 δίκλινα και 16 τρίκλινα δωμάτια.

3. Αν τον αγώνα παρακολούθησαν x παιδιά και y ενήλικες, τότε από τα δεδομένα έχουμε:

$$\begin{cases} x+y=2200 \\ 1,5x+4y=5050 \end{cases},$$

η λύση του οποίου είναι το ζεύγος $(x, y) = (1500, 700)$.

Επομένως, τον αγώνα παρακολούθησαν 1500 παιδιά και 700 ενήλικες.

4. Έχουμε ότι:

- για $T = 20$, είναι $R = 0,4$, οπότε:

$$0,4 = \alpha \cdot 20 + \beta \Leftrightarrow 20\alpha + \beta = 0,4, \quad (1)$$

- και για $T = 80$, είναι $R = 0,5$, οπότε:

$$0,5 = 80\alpha + \beta \Leftrightarrow 80\alpha + \beta = 0,5, \quad (2).$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 20\alpha+\beta=0,4 \\ 80\alpha+\beta=0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{600} \\ \beta=\frac{11}{30} \end{cases}.$$

Άρα $R=\frac{1}{600}\cdot T+\frac{11}{30}$.

5. Έστω ότι απαιτούνται x ml από το πρώτο διάλυμα και y ml από το δεύτερο διάλυμα, τότε $x + y = 100$, (1).

Η ποσότητα του υδροχλωρικού οξέος σε κάθε διάλυμα είναι $\frac{50}{100}x$ στο πρώτο και $\frac{80}{100}y$ στο δεύτερο. Επομένως $\frac{50}{100}x+\frac{80}{100}y=\frac{68}{100}\cdot 100,\ (2)$.

Οι εξισώσεις (1) και (2) ορίζουν το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{50}{100}x+\frac{80}{100}y=\frac{68}{100}\cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ 5x+8y=680 \end{cases},$$

του οποίου η λύση είναι το ζεύγος (x, y) = (40, 60).

Επομένως, πρέπει να αναμείξει 40 ml από το πρώτο με 60 ml από το δεύτερο.

6. **i.** Λύνουμε ως προς y τις εξισώσεις των ευθειών:

$$2x+4y=3 \Leftrightarrow 4y=-2x+3 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{4}x+\frac{3}{4}. \text{ Άρα } \lambda_1=-\frac{1}{2}.$$

$$x+2y=\alpha \Leftrightarrow 2y=-x+\alpha \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{\alpha}{2}. \text{ Άρα } \lambda_2=-\frac{1}{2}.$$

ii. Επειδή $\lambda_1 = \lambda_2$, οι ευθείες ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες τέμνονται.

iii. Για να είναι παράλληλες, αρκεί $\frac{3}{4}\neq\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow 4\alpha\neq 6\Leftrightarrow \alpha\neq\frac{3}{2}$.

7. **i.** $\begin{cases} \alpha x+y=\alpha^2 \\ x+\alpha y=1 \end{cases}$. Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

- $D=\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-1=(\alpha+1)(\alpha-1)$.
- $D_x=\begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+1+1)$.
- $D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\alpha-\alpha^2=\alpha(1-\alpha)$.

Αν $D \neq 0$, δηλαδή, αν $\alpha \neq -1$ και $\alpha \neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, οπότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2+1+1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1} \quad \text{και} \quad x=\frac{D_y}{D}=\frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{-\alpha}{\alpha+1}.$$

Επομένως, αν $\alpha \neq \pm 1$, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}, \dfrac{-\alpha}{\alpha+1}\right)$.

- Αν $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$, το οποίο έχει άπειρο πλήθος λύσεων, που σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται.
- Αν $\alpha \neq -1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$ και είναι αδύνατο που σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii. $\begin{cases} \alpha x - y = \alpha \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$.

Επειδή $D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 \neq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, επομένως οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. **i.** Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

- $D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 4 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+1) - 4\cdot(-2) = -(\lambda^2-1)+8$

$$= -\lambda^2+1+8 = -\lambda^2+9 = -(\lambda^2-9)$$
$$= -(\lambda+3)(\lambda-3).$$

- $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -1\cdot(\lambda+1) - (-2)\cdot(-2) = -\lambda-1-4 = -(\lambda+5).$

- $D_y = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2\cdot(\lambda-1) - 4 = -2\lambda+2-4 = -2\lambda-2 = -2(\lambda+1).$

- Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μια λύση, την:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(\lambda+5)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{\lambda+5}{(\lambda+3)(\lambda-3)} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(\lambda+1)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+3)(\lambda-3)}.$$

- Αν $\lambda = 3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} 2x-2y=1 \\ 4x-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=1 \\ 2x-2y=-1 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

- Αν $\lambda = -3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -4x-2y=1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=-1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

ii. Βρίσκουμε τις ορίζουσες:

- $D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2)-5 = \mu^2-4-5 = \mu^2-9 = (\mu+3)(\mu-3).$

- $D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2)-25 = 5\mu+10-25 = 5\mu-15 = 5(\mu-3).$

- $D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot(\mu-2)-5 = 5\mu-10-5 = 5\mu-15 = 5(\mu-3).$

- Αν $D \neq 0$, δηλαδή, αν $\mu \neq \pm 3$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, την:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{(\mu+3)} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{(\mu+3)}.$$

- Αν $\mu = 3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$\begin{cases} x+5y=5 \\ x+5y=5, \end{cases}$ που έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $(x, y) = (5-5\kappa, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Αν $\mu = -3$, τότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -5x+5y=5 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}, \text{ που είναι αδύνατο.}$$

9. Αν R_1, R_2 και R_3 οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1, O_2 και O_3 αντίστοιχα, που εφάπτονται εξωτερικά, τότε έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} R_1+R_2=6, & (1) \\ R_2+R_3=7, & (2). \\ R_1+R_3=5, & (3) \end{cases}$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3) που ονομάζεται «κυκλικό».

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε:

$$2(R_1+R_2+R_3) = 18 \Leftrightarrow R_1+R_2+R_3 = 9, \quad (4).$$

Αν τώρα από τα μέλη της (4) αφαιρέσουμε τα μέλη των (1), (2) και (3), βρίσκουμε ότι:

- $R_1+R_2+R_3-R_1-R_2 = 9-6 \Leftrightarrow R_3 = 3.$
- $R_1+R_2+R_3-R_2-R_3 = 9-7 \Leftrightarrow R_1 = 2.$
- $R_1+R_2+R_3-R_1-R_3 = 9-5 \Leftrightarrow R_2 = 4.$

Επομένως, οι ακτίνες των κύκλων είναι 2 cm, 4 cm και 4 cm.

10. Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο είναι ίσα. Επομένως $ΑΖ = ΑΕ = x$, $ΒΔ = ΒΖ = y$ και $ΓΔ = ΓΕ = z$.

Έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=\gamma, & (1) \\ y+z=\alpha, & (2). \\ z+x=\beta, & (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε:

$$2(x+y+z)=\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow x+y+z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}, \ (4).$$

- Από (4) και (1) έχουμε $\gamma+z=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.
- Από (4) και (2) έχουμε $x+\alpha=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.
- Από (4) και (3) έχουμε $y+\beta=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow y=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, τότε:

$$x=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\frac{2\tau-\alpha-\alpha}{2}=\tau-\alpha \quad \text{και ομοίως} \quad y=\tau-\beta, \quad z=\tau-\gamma.$$

11. Έστω x, y, z οι ποσότητες σε lt από κάθε διάλυμα αντίστοιχα που θα χρησιμοποιήσει ο Χημικός. Τότε από τα δεδομένα προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} x+y+z=52 \\ \frac{50}{100}x+\frac{10}{100}y+\frac{30}{100}z=\frac{32}{100}\cdot 52 \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=52 & ,\ (1) \\ 50x+10y+30z=1664 & ,\ (2). \\ x=2z & ,\ (3) \end{cases}$$

Από (1) και (3) έχουμε $y + 3z = 52$, οπότε $y = 52 - 3z$ και η (2) γίνεται:

$$\begin{aligned} 50\cdot 2z+10(52-3z)+30z=1664 &\Leftrightarrow 100z+520-30z+30z=1664 \\ &\Leftrightarrow 100z=1144 \Leftrightarrow z=11,44, \end{aligned}$$

οπότε $z = 11,44$ lt. Επομένως $x = 22,88$lt και $y = 17,68$ lt.

12. • Στην 1η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο 3, θα ισχύει $f(0) = 3$, οπότε θα έχουμε $\gamma = 3$, επομένως το τριώνυμο θα είναι της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$.

Επειδή το τριώνυμο $f(x)$ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ και $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$, θα ισχύει:

$$\begin{cases} \frac{-\beta}{2\alpha} = 2 \\ f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4\alpha \\ f(2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Επομένως είναι $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- Στη 2η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $g(-1) = 0$, θα έχουμε:

$$\alpha - \beta + \gamma = 0, \quad (2).$$

Επειδή, επιπλέον, η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x)$ έχει κορυφή το σημείο $K(1, 4)$, θα ισχύει:

$$\begin{cases} \frac{-\beta}{2\alpha} = 1 \\ g\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ g(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \alpha + \beta + \gamma = 4 \end{cases}.$$

Επομένως, λόγω της (3), οι (2) και (4) γράφονται:

$$\begin{cases} 3\alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -3\alpha \\ -\alpha - 3\alpha = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases}.$$

Άρα, είναι και $\alpha = -1$, $\beta = 2$ και $\gamma = 3$, οπότε έχουμε $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

- Στην 3η περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $h(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία 2 και 4 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο 4, θα ισχύει:

$$\begin{cases} h(2) = 0 \\ h(4) = 0 \\ h(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha + 2\beta = -4 \\ 16\alpha + 4\beta = -4 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = -2 \\ 4\alpha + \beta = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha - 2 \\ 4\alpha - 2\alpha - 2 = -1 \\ \gamma = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 0,5. \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

Επομένως, είναι $h(x) = 0,5x^2 - 3x + 4$.

1.2 Μη Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Λύνοντας τη δεύτερη εξίσωση ως προς y προκύπτει $y = 1 - x$, (1), οπότε αντικαθιστώντας στην πρώτη, παίρνουμε:

$$x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 + x - x^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0, \ (2).$$

Η (2) έχει ρίζες $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$, οπότε λόγω της (1) είναι:

$$y_1 = 1 - x_1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{και} \quad y_2 = 1 - x_2 = 1 - 2 = -1.$$

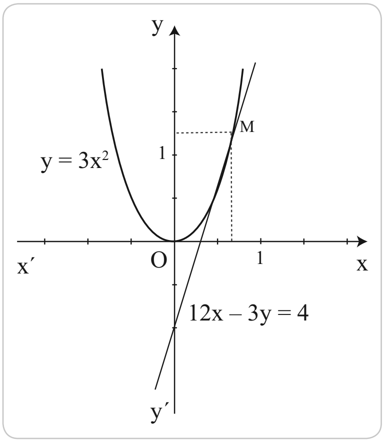
Επομένως, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(-1, 2)$ και $(2, -1)$.

2. i. Αντικαθιστώντας την τιμή του y από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη προκύπτει η εξίσωση:

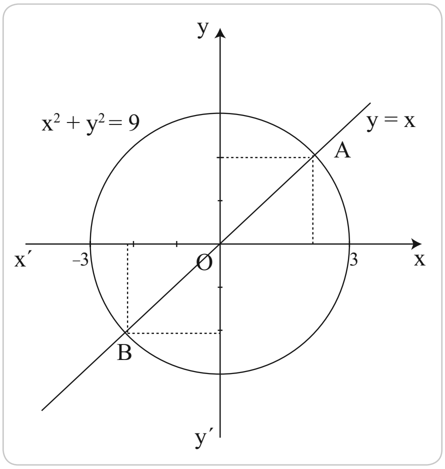
$$12x - 3(3x^2) = 4 \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 0, \ (1).$$

Η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα, την $x = \frac{2}{3}$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $y = \frac{4}{3}$.

Επομένως, το σύστημα έχει μοναδική λύση, το ζεύγος $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Για να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τη λύση του συστήματος χαράσσουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή $y = 3x^2$ και την ευθεία $12x - 3y = 4$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές έχουν ένα μόνο κοινό σημείο M, το οποίο έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.



ii. Το σύστημα γράφεται:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & ,\ (1) \\ y = x & ,\ (2) \end{cases}.$$

Η (1), λόγω της (2), γίνεται

$x^2 + x^2 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 = 9$ και έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ και } x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

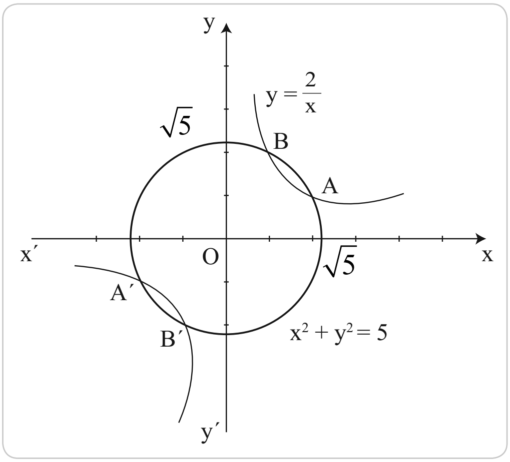
οπότε επειδή y = x έχουμε:

$$y_1 = x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad y_2 = x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Για να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος χαράσσουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$ με κέντρο το σημείο O(0, 0) και ακτίνα 3 καθώς επίσης και την ευθεία y = x. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε δύο σημεία, τα $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ και $B\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$.

iii. Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει



$x \neq 0,\ y \neq 0$ και $y = \frac{2}{x}$.

Η πρώτη εξίσωση γίνεται:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 + 4 = 5x^2$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0,\ (1).$$

Αν θέσουμε $x^2 = \omega$, (2), η (1) γίνεται

$$\omega^2 - 5\omega = 4 = 0,\ (3).$$

Αυτή έχει ρίζες $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = 4$, οπότε λόγω της (2) έχουμε $x^2 = 1$ ή $x^2 = 4$. Από αυτές παίρνουμε τέσσερις ρίζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ και $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, οπότε για το y παίρνουμε τις τιμές

$$y_1 = \frac{2}{x_1} = -2,\ y_2 = \frac{2}{x_2} = 2 \text{ και } y_3 = \frac{2}{-2} = -1,\ y_4 = \frac{2}{2} = 1.$$

Άρα, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ και $(2, 1)$.

Για να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος χαράσσουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων τον κύκλο $x^2 + y^2 = 5$ το $O(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$, καθώς επίσης και την υπερβολή $y = \frac{2}{x}$.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές τέμνονται σε τέσσερα σημεία, τα $(-1, -2)$, $(1, 2)$, $(-2, -1)$ και $(2, 1)$.

3. Από την $v = v_0 + \alpha t$, οπότε $\alpha = \frac{v - v_0}{t}$. Αντικαθιστούμε στην πρώτη και έχουμε:

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot t^2 = v_0 t + \frac{(v - v_0)t}{2} = \frac{2v_0 t + v\tau - v_0 t}{2}.$$

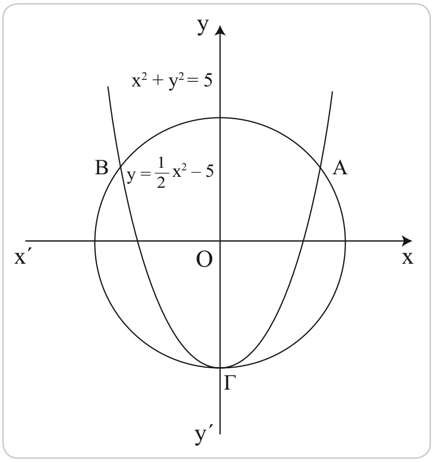
Άρα $S = \frac{v + v_0}{2} \cdot t$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η δεύτερη εξίσωση λόγω της πρώτης γράφεται $2y + 10 + y^2 = 25$ ή, ισοδύναμα, $y^2 + 2y - 15 = 0$, η οποία έχει ρίζες 3 και -5. Για $y = 3$ έχουμε $x^2 = 16$, οπότε $x = 4$ ή $x = -4$. Για $y = -5$ έχουμε $x^2 = 0$, οπότε $x = 0$.

Άρα, το σύστημα έχει τρεις λύσεις τις $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(0, -5)$.

Σχεδιάζουμε σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων την παραβολή $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 25$ και παρατηρούμε ότι έχουν τρία κοινά σημεία.



2. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y(2x - y - 5) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $2x - y - 5 = 0$, οπότε το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με τα συστήματα:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}, \ (1) \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}, \ (2).$$

Για να λύσουμε το (1) θέτουμε στη δεύτερη εξίσωση $y = 0$, οπότε έχουμε $x^2 - 4x + 3 = 0$. Οι ρίζες αυτής είναι $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$, έτσι το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη $(1, 0)$ και $(3, 0)$. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (2) γράφεται $y = 2x - 5$, (3) και αν θέσουμε στη δεύτερη παίρνουμε:

$$2x-5=x^2-4x+3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0.$$

Οι ρίζες αυτές είναι $x_3 = 2$ και $x_4 = 4$, οπότε λόγω της (3) είναι $y_3 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$ και $y_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$. Έτσι, το σύστημα (2) έχει δύο λύσεις, τα ζεύγη (2, –1) και (4, 3). Επομένως το αρχικό σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, τα ζεύγη (1, 0), (3, 0), (2, –1) και (4, 3).

3. Έστω x, y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε είναι:

$$xy = 120, \quad (1) \qquad \text{και} \qquad (x+3)(y-2) = 120, \quad (2).$$

Η (2) γράφεται $xy + 3y - 2x - 6 = 120$ και λόγω της (1) γίνεται:

$$120+3y-2x-6=120 \Leftrightarrow 3y-2x=6 \Leftrightarrow y=\frac{2x+6}{3}, \ (3)$$

και αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει η εξίσωση:

$$x\left(\frac{2x+6}{3}\right)=120 \Leftrightarrow 2x^2+6x=360 \Leftrightarrow x^2+3x-180=0,$$

η οποία έχει ρίζες $x_1 = 12$ και $x_2 = -15$.

Επειδή οι διαστάσεις είναι θετικοί αριθμοί θα έχουμε x = 12 cm, οπότε, λόγω της (1), θα είναι $y=\frac{120}{x}=\frac{120}{12}=10$ cm.

4. Για να βρούμε τα σημεία, στα οποία η ευθεία $y = 2x + \kappa$ τέμνει την παραβολή $y = -x^2$ λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} y=2x+\kappa \\ y=-x^2 \end{cases}, \ (1).$

Οι τετμημένες των σημείων τομής είναι ρίζες της εξίσωσης:

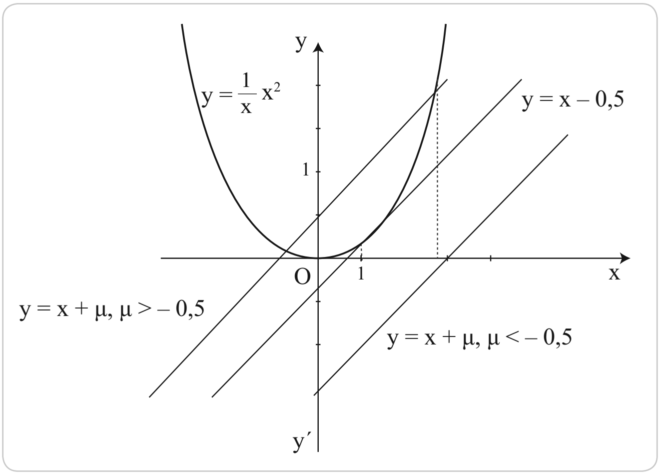
$$-x^2 = 2x+\kappa \Leftrightarrow x^2+2x+\kappa=0, \quad (2).$$

Οι δύο γραμμές θα τέμνονται σε δύο σημεία, αν το σύστημα (1) έχει δύο λύσεις, που σημαίνει ότι η εξίσωση (2) θα πρέπει να έχει δύο λύσεις. Αυτό συμβαίνει, μόνο αν είναι $\Delta = 4 - 4\kappa > 0 \Leftrightarrow -4\kappa > -4 \Leftrightarrow \kappa < 1$.

5. Αντικαθιστώντας το $y = x + \mu$ στην πρώτη εξίσωση προκύπτει:

$$2(x+\mu)=x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-2\mu=0, \ (1),$$

η οποία είναι δεύτερου βαθμού, με διακρίνουσα $\Delta = 4 + 8\mu = 4(1 + 2\mu)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:



- $\Delta > 0$, δηλαδή $\mu > -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει δύο ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία τέμνονται σε δύο σημεία.
- $\Delta = 0$, δηλαδή $\mu = -\frac{1}{2}$. Η (1) έχει διπλή ρίζα, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μία λύση, οπότε η παραβολή και ευθεία εφάπτονται σε ένα σημείο.
- $\Delta < 0$, δηλαδή $\mu < -\frac{1}{2}$. Η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, που σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις, οπότε η παραβολή και ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Γραφικά τα εξαγόμενα, εξηγούνται με τη βοήθεια του προηγούμενου σχήματος.

Ερωτήσεις κατανόησης

I. $(\Sigma_1) \rightarrow$ Β, $(\Sigma_2) \rightarrow$ Α, $(\Sigma_3) \rightarrow$ Γ, $(\Sigma_4) \rightarrow$ Α.

II. **1.** Α, **2.** Ψ, **3.** Α, **4.** Ψ.

Κεφάλαιο 2ο: Ιδιότητες συναρτήσεων

2.1 Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

• Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

• Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

2. • Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$.

• Η g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.

• Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και για $x = 1$ το $h(-1) = h(1) = -2$.

3. i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε τα $f(x) \geq f(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

ii. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \leq g(1)$.

$$\frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2, \text{ που ισχύει.}$$

4. i. Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_1(-x) = 3(-x^2) + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f_1(x), \text{ άρα η } f_1 \text{ είναι άρτια.}$$

ii. Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_2(x), \text{ άρα η } f_2 \text{ είναι άρτια.}$$

iii. Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_3(-x) = |-x+1|,$$

οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού $f_3(-1) \neq f_3(1)$.

iv. Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(-x), \text{ άρα η } f_4 \text{ είναι περιττή.}$$

v. Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0. Άρα, η f_5 δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

vi. Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} = -f_6(x),\ \text{άρα η } f_6 \text{ είναι περιττή.}$$

5. i. Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x).$$

Άρα η f_1 είναι άρτια.

ii. Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το Ο. Άρα, δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iii. Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_3(-x) = |-x-1| - |-x+1| = |x+1| - |x-1| = -f_3(x).$$

Άρα η f_3 είναι περιττή.

iv. Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι περιττή, διότι ισχύει:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f_4(x) = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x^2+1} = \frac{1}{x} \quad \text{άρα} \quad f_4(-x) = -\frac{1}{x} = -f_4(x).$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην Ι, θα αποδείξουμε ότι:

v. Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι $f_5(-x) = \sqrt{|1-x|} = \sqrt{|x|} = f_5(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vi. Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και είναι άρτια, διότι:

$$f_6(-x) = \sqrt{1-(-x)^2} = \sqrt{1-x^2} = f_6(x),\ \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

6. i. Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0, 0). Άρα, η f είναι περιττή.

ii. Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον y′y. Άρα, η g είναι άρτια.

iii. Η C_h δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον y′y, ούτε κέντρο συμμετρίας το Ο(0, 0). Άρα, η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

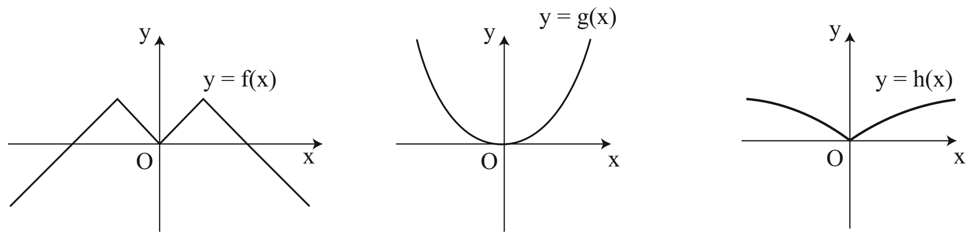
7. Ομοίως:

i. Η f είναι άρτια διότι έχει άξονα συμμετρίας τον y′y.

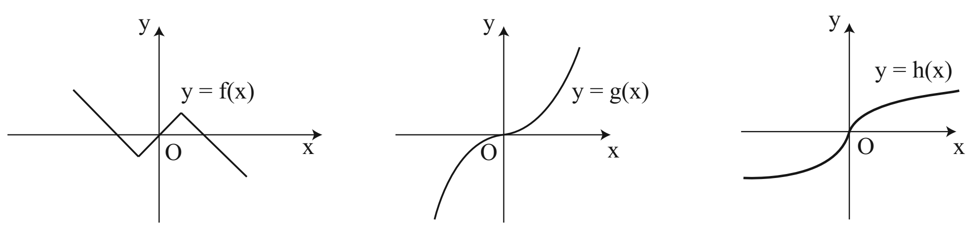
ii. Η g είναι περιττή διότι έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο(0, 0).

iii. Η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

8. **α.** Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς τον άξονα y′y.



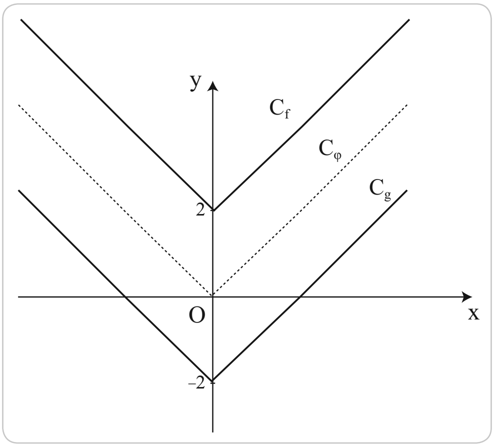
β. Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς την αρχή των αξόνων.



2.2 Κατακόρυφη – Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

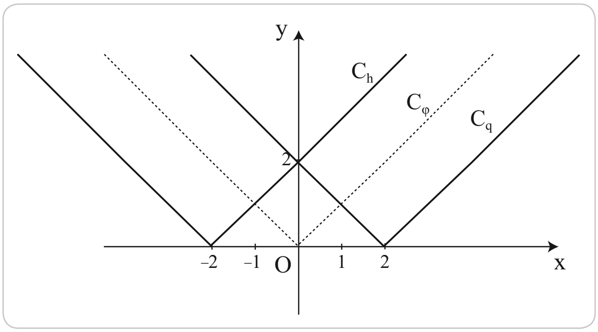
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Όπως γνωρίζουμε, η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$, αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).

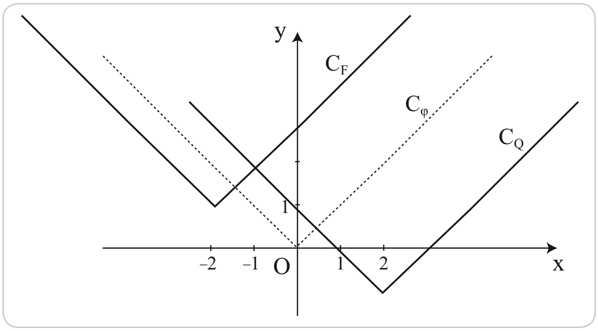


2. Χαράζουμε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $φ(x) = |x|$.

Η γραφική παράσταση της $h(x) = |x + 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της $q(x) = |x – 2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).



3. Χαράζουμε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $φ(x) = |x|$ και στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 2|$, που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y = |x|$ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y = |x + 2| + 1$, που προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης $y = |x + 2|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της $F(x) = |x + 2| + 1$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδας προς τα πάνω (σχήμα).



Ομοίως, η γραφική παράσταση της $G(x) = |x – 2| – 1$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y = |x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

4. **i.** Επειδή:

$$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 = 2(x - 1)^2 + 3,$$

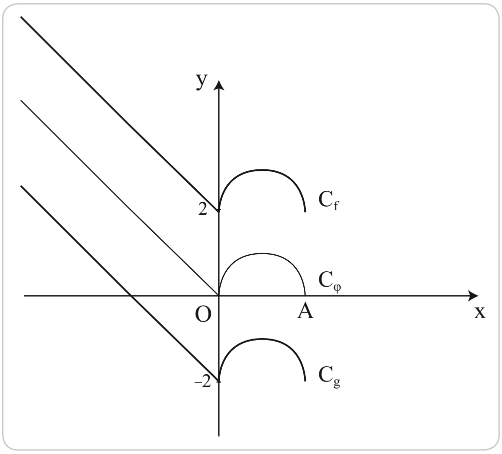
επομένως, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii. Επειδή:

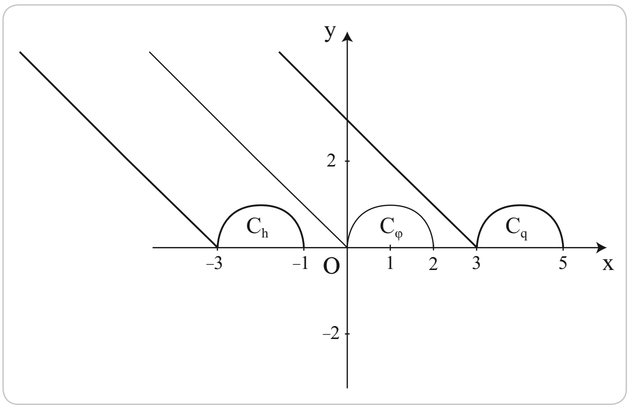
$$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 = -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 = -2(x - 2)^2 - 1,$$

επομένως, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

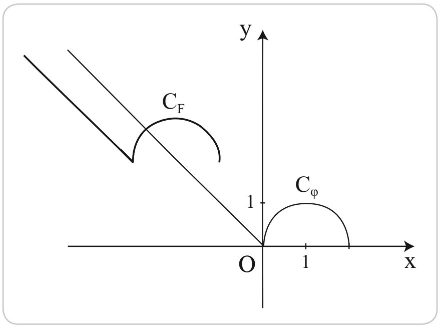
5. **i.**

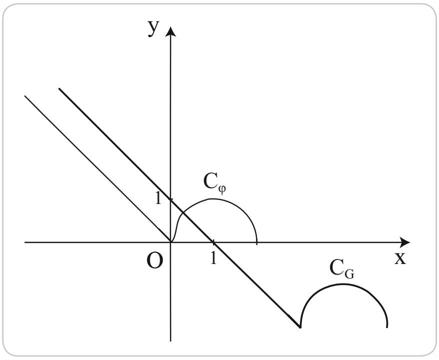


ii.



iii.





6. **i.** $f(x) = 2(x-2)^2 - 1 + 1 = 2(x-2)^2$.

ii. $f(x) = 2(x-3)^2 - 1 - 2 = 2(x-3)^2 - 3$.

iii. $f(x) = 2(x+2)^2 - 1 + 1 = 2(x+2)^2$.

iv. $f(x) = 2(x+3)^2 - 1 - 2 = 2(x+3)^2 - 3$.

Ερωτήσεις κατανόησης

I. **1.** Α, **2.** Α, **3.** Ψ, **4.** Ψ, **5.** Α, **6.** Α, **7.** Ψ, **8.** Α, **9.** Α, **10.** Ψ.

II. Γ.

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $ημ30° = \frac{x}{6}$, οπότε $x = 6ημ30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο, τώρα, ΔΑΓ έχουμε $εφω = \frac{x}{3} = \frac{3}{3} = 1$, οπότε $ω = 45°$.

Επομένως, επειδή $ημω = \frac{x}{y}$, έχουμε $ημ45° = \frac{3}{y}$, οπότε:

$$y = \frac{3}{ημ45°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

2. Επειδή Β + Γ = 90° θα είναι Α = 90°, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και είναι $ημ30° = \frac{(AB)}{2}$. Άρα $(AB) = 2ημ30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Επίσης, είναι $ημ60° = \frac{(AΓ)}{2}$. Άρα $(AΓ) = 2ημ60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

3. **i.** Γνωρίζουμε ότι $S = α \cdot ρ$, $6 = ω \cdot 1$, άρα $ω = 6$ rad.

ii. $6 = ω \cdot 2$, άρα $ω = 3$ rad. **iii.** $6 = ω \cdot 3$, άρα $ω = 2$ rad.

4. Από τον τύπο $\frac{α}{π} = \frac{μ}{180}$ έχουμε:

i. Για μ = 30, είναι $\frac{α}{π} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow \frac{α}{π} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow α = \frac{π}{6}$. Άρα $30° = \frac{π}{6}$ rad.

ii. Για μ = 120, είναι $\frac{α}{π} = \frac{120}{180} \Leftrightarrow \frac{α}{π} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow α = \frac{2π}{3}$. Άρα $120° = \frac{2π}{3}$ rad.

iii. Για μ = 1260, είναι $\frac{α}{π} = \frac{1260}{180} \Leftrightarrow \frac{α}{π} = 7 \Leftrightarrow α = 7π$. Άρα $1260° = 7π$ rad.

iv. Για μ = 1485, είναι $\frac{α}{π} = \frac{1485}{180} \Leftrightarrow \frac{α}{π} = \frac{33}{4} \Leftrightarrow α = \frac{33π}{4}$. Άρα $-1485° = -\frac{33π}{4}$ rad.

5. Από τον τύπο $\frac{α}{π} = \frac{μ}{180}$ έχουμε:

i. $\frac{\frac{π}{10}}{π} = \frac{μ}{180} \Leftrightarrow μ = 18$, άρα $\frac{π}{10}$ rad $= 18°$.

ii. $\dfrac{\frac{5\pi}{6}}{\pi}=\dfrac{\mu}{180}\Leftrightarrow \mu=150,$ άρα $\dfrac{5\pi}{6}$ rad $=150°.$

iii. $\dfrac{\frac{91\pi}{3}}{\pi}=\dfrac{\mu}{180}\Leftrightarrow \mu=5460,$ άρα $\dfrac{91\pi}{3}$ rad $=5460°.$

iv. $\dfrac{100}{\pi}=\dfrac{\mu}{180}\Leftrightarrow \mu=\dfrac{18000}{\pi},$ άρα 100 rad $=\dfrac{18000°}{\pi}.$

6. i. Είναι 1830° = 5 · 360° + 30°, οπότε ημ1830° = ημ(5 · 360° + 30°) = ημ30° $=\dfrac{1}{2}$,

συν1830° = συν (5 · 360° + 30°) = συν30° $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ακόμη εφ1830° = εφ30° $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

σφ1830° = σφ30° $=\sqrt{3}$.

ii. Είναι 2940° = 8 · 360° + 60°, οπότε ημ2940° = ημ(8 · 360° + 60°) = ημ60° $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

συν2940° = συν60° $=\dfrac{1}{2}$, εφ2940° = εφ60° $=\sqrt{3}$, σφ2940° = σφ60° $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

iii. Είναι 1980° = 5 · 360° + 180°, οπότε ημ1980° = ημ(5 · 360° + 180°) = ημ180° = 0, συν1980° = συν180° = –1, εφ1980° = εφ180° = 0, ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των 1980°.

iv. Είναι 3600° = 10 · 360° + 0°, οπότε ημ3600° = ημ0° = 0, συν3600° = συν0° = 1, εφ3600° = εφ0° = 0, ενώ δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των 3600°.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΠΝ έχουμε $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{h}{(\Pi\Delta)}$. Τότε $(\Pi\Delta)=\dfrac{h}{\varepsilon\varphi\omega}$, (1).

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΛΝ έχουμε $\varepsilon\varphi 70°=\dfrac{h}{(\Delta\Lambda)}$. Τότε $(\Delta\Lambda)=\dfrac{h}{\varepsilon\varphi 70°}$, (2).

Επειδή (ΠΛ) = (ΠΔ) + (ΔΛ), λόγω των (1) και (2), έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{h}{\varepsilon\varphi\omega}+\frac{h}{\varepsilon\varphi 70°}=1000 &\Leftrightarrow h\cdot\varepsilon\varphi 70°+h\cdot\varepsilon\varphi\omega=1000\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi 70°\\ &\Leftrightarrow h\left(\varepsilon\varphi 70°+\varepsilon\varphi\omega\right)=1000\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi 70°\\ &\Leftrightarrow h=\frac{1000\cdot\varepsilon\varphi\omega\cdot\varepsilon\varphi 70°}{\varepsilon\varphi 70°+\varepsilon\varphi\omega},\ (3).\end{aligned}$$

i. Αν ω = 30°, τότε, λόγω της (3), είναι $h=\dfrac{1000\cdot εφ30°\cdot εφ70°}{εφ70°+εφ30°}\simeq 478.$

Αν ω = 45°, τότε έχουμε $h=\dfrac{1000\cdot εφ45°\cdot εφ70°}{εφ70°+εφ45°}\simeq 733.$

Αν ω = 60°, τότε έχουμε $h=\dfrac{1000\cdot εφ60°\cdot εφ70°}{εφ70°+εφ60°}\simeq 1062.$

ii. Αν τώρα h = 1000, τότε λόγω της (3), είναι:

$$1000=\frac{1000\cdot εφω\cdot εφ70°}{εφ70°+εφω}\Leftrightarrow 1=\frac{εφω\cdot εφ70°}{εφ70°+εφ45°}\Leftrightarrow εφω\cdot εφ70°=εφ70°\cdot εφω$$

$$\Leftrightarrow εφω\left(εφ70°-1\right)=εφ70°\Leftrightarrow εφω=\frac{εφ70°}{εφ70°-1}\simeq 1{,}5723$$

και από τους τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε $ω\simeq 58°$.

2. i. Είναι $Α\hat{Γ}Β=90°$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και επειδή $Γ\hat{Α}Β=45°$ θα είναι (ΑΓ) = (ΒΓ). Έχουμε όμως:

$$ημ45°=\frac{(ΑΓ)}{(ΑΒ)}=\frac{(ΑΓ)}{2},\ \text{οπότε}\ (ΑΓ)=2ημ45°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

και επειδή (ΑΓ) = (ΒΓ), θα είναι $(ΒΓ)=\sqrt{2}.$

ii. Είναι $Α\hat{Δ}Β=90°$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε έχουμε:

$$ημ\,22{,}5°=\frac{(ΒΔ)}{(ΑΒ)}=\frac{(ΒΔ)}{2}.$$

Επειδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΒ και ΔΑΕ είναι ίσα διότι έχουν ΑΔ = ΑΔ (κοινή) και $Δ\hat{Α}Β=Δ\hat{Α}Ε=22{,}5°$, τότε θα έχουν ΔΒ = ΔΕ.

Έτσι (ΕΒ) = 2(ΒΔ) = 4ημ22,5°.

iii. Από την ισότητα των τριγώνων ΔΑΒ και ΔΑΕ προκύπτει (ΑΕ) = (ΑΒ) = 2.

Άρα (ΕΓ) = (ΑΕ) – $(ΑΓ)=2-\sqrt{2}.$

iv. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΕΒ (σχήμα) έχουμε:

$$(ΕΒ)^2=(ΓΒ)^2+(ΓΕ)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2.$$

Άρα $ΕΒ=2\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

v. Έχουμε $\eta\mu\, 22,5° = \dfrac{(\Delta B)}{2} = \dfrac{\dfrac{(EB)}{2}}{2} = \dfrac{(EB)}{4} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

vi. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ημίτονο των γωνιών $\dfrac{22,5°}{2}$, $\dfrac{22,5°}{4}$ κ.τ.λ., αρκεί να διχοτομήσουμε τη γωνία $B\widehat{A}\Delta$ κ.τ.λ.

3. • Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\eta\mu\, 30° = \dfrac{6}{(A\Gamma)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{(A\Gamma)} \Leftrightarrow (A\Gamma) = 12$ μονάδες μήκους.

• Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ έχουμε $B\widehat{A}\Delta = 30°$. Επομένως:

$$\varepsilon\varphi 30° = \frac{(B\Delta)}{(AB)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 30° = \frac{(B\Delta)}{6} \Leftrightarrow (B\Delta) = 6 \cdot \varepsilon\varphi 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα $B\Delta = 2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

• Από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\eta\mu\, 60° = \dfrac{(B\Gamma)}{12} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(B\Gamma)}{12}$.

Άρα $(B\Gamma) = 6\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

• Έχουμε $(\Gamma\Delta) = (B\Gamma) - (B\Delta) = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

Άρα $(\Gamma\Delta) = (\Delta A) = 4\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

Επομένως, περίμετρος $= 12 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 12 + 8\sqrt{3}$ μονάδες μήκους.

Εμβαδόν $= \dfrac{1}{2}(\Delta\Gamma)\cdot(AB) = \dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 6 = 12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

4. Όπως είναι ο γνωστό, ο λεπτοδείκτης εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε χρόνο 1 ώρας ή 3600 δευτερολέπτων. Διαγράφει δηλαδή γωνία 2π rad σε 3600 sec.

Επομένως σε 1 sec διαγράφει γωνία $\dfrac{2\pi}{3600}$ rad.

Αν το μήκος του λεπτοδείκτη είναι ίσο με ρ, τότε σύμφωνα με τον τύπο $S = \alpha \cdot \rho$, το άκρο του λεπτοδείκτη σε 1 sec θα διαγράψει τόξο μήκους $\dfrac{2\pi}{3600}\cdot\rho$.

Για να είναι το μήκος αυτό ίσο με 1 mm αρκεί $\dfrac{2\pi}{3600}\cdot\rho = 1 \text{ mm} \Leftrightarrow \rho = \dfrac{3600}{2\pi} \text{ mm} \simeq 573 \text{ mm}$.

3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν στην ισότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$ αντικαταστήσουμε το ημx με $\frac{3}{5}$ βρίσκουμε:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + συν^2x = 1 \Leftrightarrow συν^2x = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow συνx = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Διότι για $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ισχύει $συνx < 0$.

Επομένως $εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{-3}{4}$ και $σφx = \frac{συνx}{ημx} = \frac{-4}{3}$.

2. Αν στην ισότητα $ημ^2x + συν^2x = 1$ αντικαταστήσουμε το συνx με $\frac{-2}{3}$ βρίσκουμε:

$$ημ^2x + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow ημ^2x + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow ημ^2x = \frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow ημx = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Διότι για $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ισχύει $ημx < 0$.

Επομένως $εφx = \frac{\sqrt{5}}{2}$ και $σφx = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. • $σφx = \frac{1}{εφx} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

• Είναι $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{ημx}{συνx} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow ημx = -\frac{\sqrt{3}}{3}συνx, \ (1)$.

Επειδή $ημ^2x + συν^2x = 1$, λόγω της (1), έχουμε:

$$\frac{1}{3}συν^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow συν^2x + 3συν^2x = 3 \Leftrightarrow 4συν^2x = 3$$

$$\Leftrightarrow συν^2x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Διότι για $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ισχύει $συνx > 0$.

• Από την (1) παίρνουμε $ημx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$.

4. • $εφx = \frac{1}{σφx} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

- Είναι $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}\eta\mu x, \ (1).$

  Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε:

$$\eta\mu^2 x + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\eta\mu x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \frac{4}{5}\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 5$$

$$\Leftrightarrow 9\eta\mu^2 x = 5 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

  Από την (1), τώρα, παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3}.$

5. • Είναι $\sigma\varphi x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2\eta\mu x.$

Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, λόγω της (1), έχουμε:

$$\eta\mu^2 x + (-2\eta\mu x)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Διότι για $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ισχύει $\eta\mu x < 0$.

- Από την (1) τώρα παίρνουμε $\sigma\upsilon\nu x = -2\cdot\frac{-\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

  Επομένως η αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ ισούται με:

$$\frac{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{\cancel{5}}} = -\frac{4}{5+2\sqrt{5}} = \frac{-4(5-2\sqrt{5})}{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = \frac{8\sqrt{5}-20}{5}.$$

6. Επειδή $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, αν υποθέσουμε ότι:

i. $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε θα ισχύει $0^2 + 0^2 = 1$, δηλαδή $0 = 1$, που είναι άτοπο.

ii. $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$, τότε θα ισχύει $1^2 + 1^2 = 1$, δηλαδή $2 = 1$, που είναι άτοπο.

iii. $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$, τότε $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, που είναι αληθής.

Άρα, υπάρχει τέτοια τιμή του x.

7. Αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του M(x, y) από την αρχή O(0, 0) είναι ίση με 3.

Πράγματι $(OM) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (3\eta\mu\theta)^2} = \sqrt{9\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\eta\mu^2\theta}$

$$= \sqrt{9\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta\right)} = \sqrt{9} = 3.$$

8. Έχουμε $9x^2 + 4y^2 = 9(2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + 4(3\eta\mu\theta)^2 = 9 \cdot 4\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4 \cdot 9\eta\mu^2\theta$

$$= 36\sigma\upsilon\nu^2\theta + 36\eta\mu^2\theta = 36(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) = 36 \cdot 1 = 36.$$

9. Έχουμε $x^2 + y^2 + z^2 = r^2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\varphi + r^2\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\varphi + r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = r^2\eta\mu^2\theta(\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi) + r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta$

$$= r^2\eta\mu^2\theta + r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta = r^2(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = r^2.$$

10. i. Αν $1 + \sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$ και $\eta\mu\alpha \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = (1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha, \text{ που ισχύει.}$$

Αλλιώς αν $1 + \sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$ και $1 - \sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}.$$

ii. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 - (\eta\mu^2\alpha)^2 = (\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) \cdot (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1.$$

11. Είναι:

i. $$\frac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu^2\theta+(1+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{\eta\mu^2\theta+1+2+\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}$$

$$= \frac{2+2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{2}{\eta\mu\theta}.$$

ii. $$\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x(1+\eta\mu x)+\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

12. i. $$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\varepsilon\varphi\beta+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}} = \frac{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+1}{\varepsilon\varphi\alpha}} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}.$$

ii. $$\varepsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \eta\mu^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \left(\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 \cdot \eta\mu^2\alpha = \varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha.$$

13. i. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}+\dfrac{\eta\mu x}{1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}+\dfrac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x.$$

ii. $(1-\sigma\upsilon\nu x)\left(1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=(1-\sigma\upsilon\nu x)\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$$=\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\eta\mu x=\varepsilon\varphi x\cdot\eta\mu x.$$

iii. $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}=\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}}=\dfrac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\underbrace{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}_{1}}=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x.$

iv. $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\dfrac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x}=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x.$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Επειδή ημx + συνx = α έχουμε διαδοχικά:

$$(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=\alpha^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\alpha^2 \Leftrightarrow \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\frac{\alpha^2-1}{2}.$$

ii. $\dfrac{1}{\eta\mu x}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\overset{(1)}{=}\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha^2-1}{2}}=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-1}.$

iii. $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\dfrac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\overset{(1)}{=}\dfrac{1}{\dfrac{\alpha^2-1}{2}}=\dfrac{1}{\alpha^2-1}.$

iv. Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$, έχουμε:

$$\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^3-3\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$$

$$=\alpha^3-3\cdot\frac{\alpha^2-1}{2}\cdot\alpha=\alpha^3-\frac{3\alpha^3-3\alpha}{2}=\frac{3\alpha-\alpha^3}{2}=\frac{\alpha\left(3-\alpha^2\right)}{2}.$$

2. i. $\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x=(\eta\mu^2 x)^2+(\sigma\upsilon\nu^2 x)^2=(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x)^2-2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x=1-2\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x.$

ii. Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x &= \left(\eta\mu^2 x\right)^3 + \left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)^3 \\ &= \underbrace{\left(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x\right)^3}_{1} - 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \underbrace{\left(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x\right)}_{1} \\ &= 1 - 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x. \end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned} 2\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x - 3\left(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x\right) &= 2\left(1 - 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x\right) - 3\left(1 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x\right) \\ &= 2 - 6\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x - 3 + 6\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x = -1. \end{aligned}$$

3. Είναι:

- $$\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} = \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)\cdot(1+\eta\mu x)}{(1-\eta\mu x)\cdot(1+\eta\mu x)}} = \sqrt{\frac{(1+\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \frac{|1+\eta\mu x|}{|\sigma\upsilon\nu x|} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x},$$

  αφού $1 + \eta\mu x \geq 0$ και $\sigma\upsilon\nu x > 0$ (Διότι $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

- Ομοίως είναι:

  $$\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)\cdot(1-\eta\mu x)}{(1+\eta\mu x)\cdot(1-\eta\mu x)}} = \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{1-\eta\mu^2 x}} = \sqrt{\frac{(1-\eta\mu x)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}.$$

Επομένως $\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\varphi x.$

4.

> Διότι $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$
> είναι $\eta\mu x \geq 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} - \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)\left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)} \\ &= \frac{1+\sigma\upsilon\nu x + 1 - \sigma\upsilon\nu x + 2\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu x)(1-\sigma\upsilon\nu x)}}{(1+\sigma\upsilon\nu x)-(1-\sigma\upsilon\nu x)} \\ &= \frac{2+2\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{2\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2+2\sqrt{\eta\mu^2 x}}{2\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1+|\eta\mu x|}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{(1+\eta\mu x)(1-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)} = \frac{1-\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x(1-\eta\mu x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}. \end{aligned}$$

3.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Αν διαιρέσουμε τον 1200 με τον 360 βρίσκουμε πηλίκο 3 και υπόλοιπο 120.

Επομένως $1200° = 3 \cdot 360° + 120°$, οπότε:

- $ημ1200° = ημ120° = ημ(180° - 60°) = ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $συν1200° = συν120° = συν(180° - 60°) = -συν60° = -\frac{1}{2}$,
- $εφ1200° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$ και $σφ1200° = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ii. Ομοίως έχουμε $2850° = 7 \cdot 360° + 330°$, οπότε:

- $ημ(-2850)° = -ημ2850° = -ημ330° = -ημ(360° - 30°) = -ημ(-30°) = ημ(30°) = \frac{1}{2}$,
- $συν(-2850)° = συν2850° = συν330° = συν(360° - 30°) = συν(-30°) = συν30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $εφ\left(-2850°\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $σφ\left(-2850°\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

2. i. Είναι $\frac{187π}{6} = \frac{187}{12} \cdot 2π$. Αν τώρα διαιρέσουμε το 187 με το 12 βρίσκουμε πηλίκο 15 και υπόλοιπο 7. Επομένως έχουμε:

$$\frac{187π}{6} = \frac{187}{12} \cdot 2π = \frac{15 \cdot 12 + 7}{12} \cdot 2π = \left(15 + \frac{7}{12}\right) \cdot 2π = 15 \cdot 2π + \frac{7π}{6},$$

οπότε:

- $ημ\frac{187π}{6} = ημ\left(15 \cdot 2π + \frac{7π}{6}\right) = ημ\frac{7π}{6} = ημ\left(π + \frac{π}{6}\right) = -ημ\frac{π}{6} = -\frac{1}{2}$,
- $συν\frac{187π}{6} = συν\frac{7π}{6} = συν\left(π + \frac{π}{6}\right) = -συν\frac{π}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $εφ\frac{187π}{6} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $σφ\frac{187π}{6} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

ii. Είναι $\frac{21\pi}{4}=\frac{21}{8}\cdot 2\pi$. Αν τώρα διαιρέσουμε το 21 με το 8 βρίσκουμε πηλίκο 2 και υπόλοιπο 5. Επομένως έχουμε $\frac{21\pi}{4}=\frac{21}{8}\cdot 2\pi=\frac{8\cdot 2+5}{8}\cdot 2\pi=\left(2+\frac{5}{8}\right)\cdot 2\pi=2\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{4}$,

οπότε:

- $\eta\mu\frac{21\pi}{4}=\eta\mu\frac{5\pi}{4}=\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\varepsilon\varphi\frac{21\pi}{4}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$ και $\sigma\varphi\frac{21\pi}{4}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$.

3. Επειδή $Α + Β + Γ = 180°$ είναι $Α = 180° – (Β + Γ)$ και $\frac{Α}{2}=90°-\frac{Β+Γ}{2}$. Έτσι έχουμε:

i. $ημΑ = ημ(180° – (Β + Γ)) = ημ(Β + Γ)$.

ii. $συνΑ = συν(180° – (Β + Γ)) = –συν(Β + Γ)$. Άρα $συνΑ + συν(Β + Γ) = 0$.

iii. $\eta\mu\frac{Α}{2}=\eta\mu\left(90°-\frac{Β+Γ}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{Β+Γ}{2}$.

iv. $\sigma\upsilon\nu\frac{Α}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(90°-\frac{Β+Γ}{2}\right)=\eta\mu\frac{Β+Γ}{2}$.

4. Επειδή $συν(–α) = συνα$, $συν(180° + α) = –συνα$, $ημ(–α) = –ημα$ και $ημ(90° + α) = ημ(90° – (–α)) = συν(–α) = συνα$, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180°+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90°+\alpha)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{(-\eta\mu\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\sigma\varphi\alpha.$$

5. Είναι:

- $εφ(π – x) = – εφx$, $συν(2π + x) = συνx$,
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\eta\mu(-x)=-\eta\mu x$,
- $ημ(13π + x) = ημ(6 \cdot 2π + π + x) = ημ(π + x) = –ημx$, $συν(–x) = συνx$ και
- $\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(5\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\varphi x$.

Τότε $\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\dfrac{21\pi}{2}-x\right)}=\dfrac{(-\varepsilon\varphi x)\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\cancel{(-\eta\mu x)}}{\cancel{(-\eta\mu x)}\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\varepsilon\varphi x}=-1.$

6. Επειδή $\eta\mu(\pi-x)=\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu(\pi-x)=-\sigma\upsilon\nu x$, $\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x$ και

$\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$, τότε:

$$\eta\mu^2(\pi-x)+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi-x)+2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$$

$$=\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\sigma\upsilon\nu^2 x=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Επειδή:

- $\eta\mu 495°=\eta\mu(360°+135°)=\eta\mu 135°=\eta\mu(180°-45°)=\eta\mu 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\sigma\upsilon\nu 120°=\sigma\upsilon\nu(180°-60°)=-\sigma\upsilon\nu 60°=-\dfrac{1}{2}$,
- $\sigma\upsilon\nu 495°=\sigma\upsilon\nu(360°+135°)=\sigma\upsilon\nu 135°=\sigma\upsilon\nu(180°-45°)=-\sigma\upsilon\nu 45°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\sigma\upsilon\nu(-120°)=\sigma\upsilon\nu 120°=-\dfrac{1}{2}$,
- $\varepsilon\varphi(-120°)=-\varepsilon\varphi 120°=-\varepsilon\varphi(180°-60°)=\varepsilon\varphi 60°=\sqrt{3}$ και
- $\varepsilon\varphi 495°=\varepsilon\varphi(360°+135°)=\varepsilon\varphi 135°=\varepsilon\varphi(180°-45°)=-\varepsilon\varphi 45°=-1$.

Η τιμή της παράστασης ισούται με $\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}+(-1)}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3}-1}=0.$

2. Επειδή:

- $\eta\mu(5\pi+\omega)=\eta\mu(4\pi+\pi+\omega)=\eta\mu(\pi+\omega)=-\eta\mu\omega$,
- $\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega)=\sigma\upsilon\nu(6\pi+\pi-\omega)=\sigma\upsilon\nu(\pi-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$,
- $\eta\mu\left(\dfrac{5\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\omega$,
- $\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{7\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(4\pi-\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$,

- $\sigma\varphi(5\pi+\omega)=\sigma\varphi(4\pi+\pi+\omega)=\sigma\varphi(\pi+\omega)=\sigma\varphi\omega$,
- $\eta\mu(7\pi-\omega)=\eta\mu(6\pi+\pi-\omega)=\eta\mu(\pi-\omega)=\eta\mu\omega$,
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\eta\mu\omega$,
- $\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)=\sigma\varphi\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+\omega\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=-\varepsilon\varphi\omega.$

Τότε η παράσταση γίνεται:

$$\frac{(-\eta\mu\omega)\cdot(-\sigma\upsilon\nu\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\omega\cdot\cancel{\eta\mu\omega}}{\sigma\varphi\omega\cdot\cancel{\eta\mu\omega}\cdot\eta\mu\omega\cdot(-\varepsilon\varphi\omega)}=-\frac{\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega}=-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\eta\mu^2\omega-1.$$

3. Σύμφωνα με την ταυτότητα $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)&=\left[\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]^2-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\\&=5^2-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\\&=25-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sigma\varphi\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]\\&=25-2\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=25-2=23,\end{aligned}$$

(διότι $\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1$).

4. Είναι:

$$0<\frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi(\pi+x)}<1\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}<1\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi x+\frac{1}{\varepsilon\varphi x}}<1\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi x}{\frac{\varepsilon\varphi^2 x+1}{\varepsilon\varphi x}}<1$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi^2 x+1}<1\Leftrightarrow 0<\varepsilon\varphi^2 x<\varepsilon\varphi^2 x+1,$$

που ισχύει, γιατί αποκλείεται να είναι $\varepsilon\varphi x=0$, αφού, λόγω υποθέσεως, ορίζεται η $\sigma\varphi x$.

Ερωτήσεις κατανόησης

I. **1.** Α **2.** Ψ **3.** Ψ **4.** Ψ **5.** Ψ **6.** Α **7.** Ψ **8.** Α **9.** Α.

II. 1 → Η, 2 → Β, 3 → Δ, 4 → Ε, 5 → Ζ, 6 → Γ, 7 → Α, 8 → Θ.

III. **1.** Α **2.** Β **3.** Α.

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

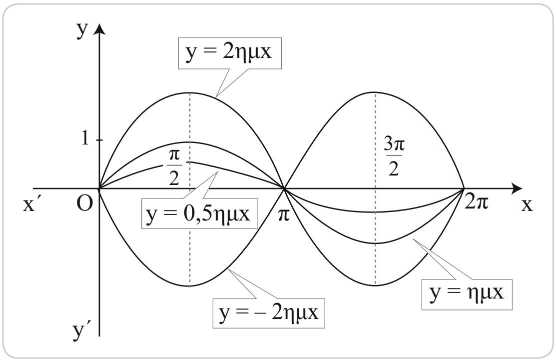
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της.

Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	–1	0
0,5ημx	0	0,5	0	–0,5	0
2ημx	0	2	0	–2	0
–2ημx	0	–2	0	2	0

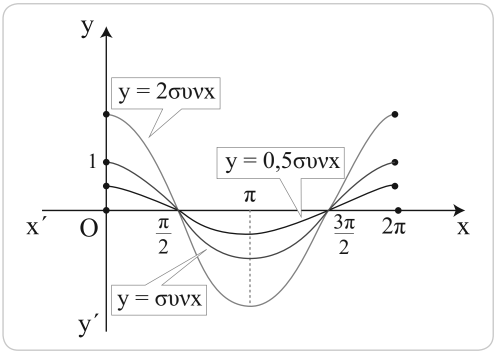
σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



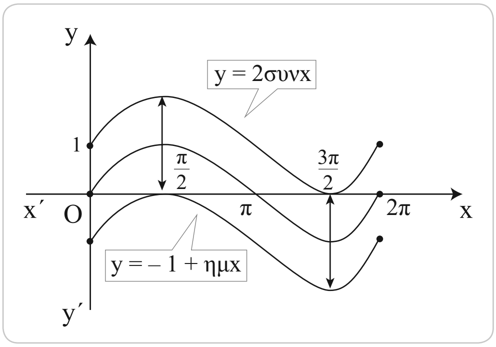
ii. Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1	0	–1	0	1
0,5συνx	0,5	0	–0,5	0	0,5
2 συνx	2	2	–2	0	2
–2συνx	–2	0	2	0	–2

σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



2. Η γραφική παράσταση της $g(x) = 1 + ημx$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x) = ημx$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $f(x) = -1 + ημx$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

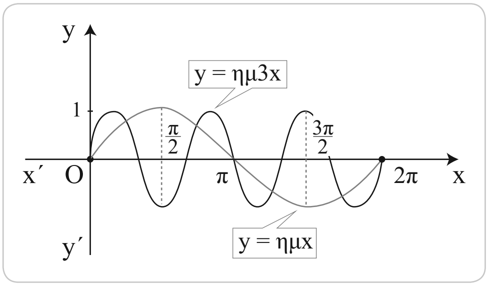


3. Η συνάρτηση $f(x) = ημ3x$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$.

Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
ημ3x	0	1	0	-1	0

σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της g, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

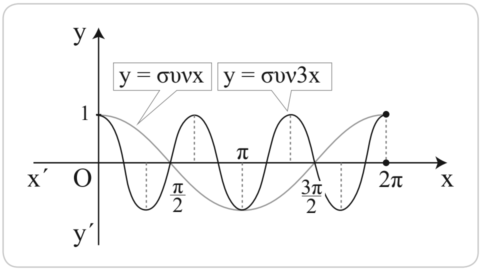


4. Ομοίως η συνάρτηση $g(x) = συν3x$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$.

Με τη βοήθεια του πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
συν3x	1	0	–1	0	1

σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

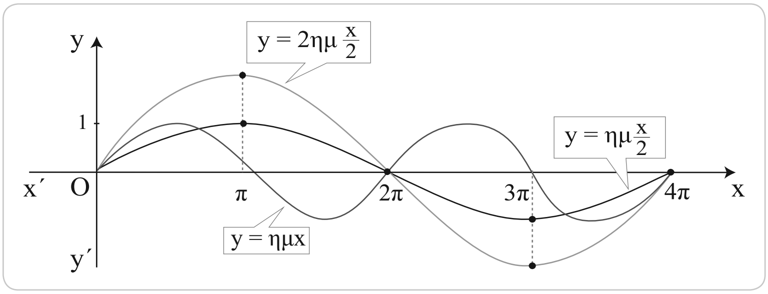


5. Επειδή η μέγιστη τιμή της $φ(x) = ημ\frac{x}{2}$ είναι 1, και η ελάχιστη τιμή της –1 η μέγιστη τιμή της $f(x) = 2ημ\frac{x}{2}$ είναι 2 και η ελάχιστη τιμή –2.

Η συνάρτηση $f(x) = 2ημ\frac{x}{2}$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:

x	0	π	2π	3π
$\mathbf{2ημ\frac{x}{2}}$	0	2	0	–2

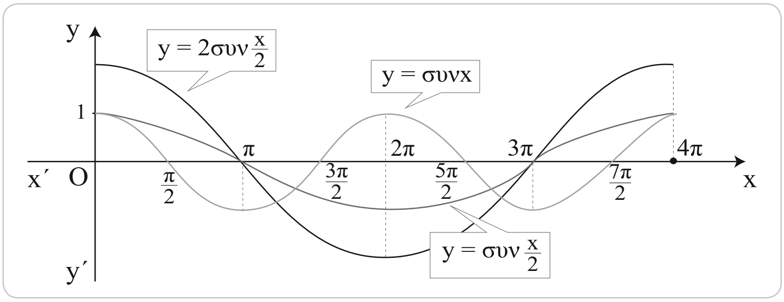


6. Ομοίως η μέγιστη τιμή της $f(x) = 2συν\frac{x}{2}$ είναι 2, και η ελάχιστη τιμή της –2.

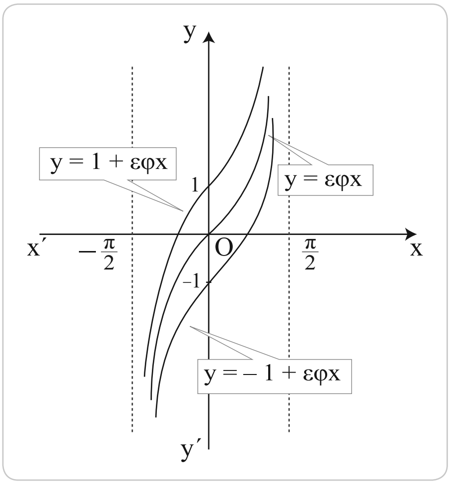
Αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 2 του σχολικού βιβλίου βρίσκουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=\text{συν}\dfrac{x}{2}$, άρα και η $f(x)=2\text{συν}\dfrac{x}{2}$, είναι περιοδική με περίοδο $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

Με τη βοήθεια του διπλανού πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x)=2\text{συν}\dfrac{x}{2}$ όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:

x	0	π	2π	3π	4π
$2\text{συν}\dfrac{x}{2}$	2	0	–2	0	2



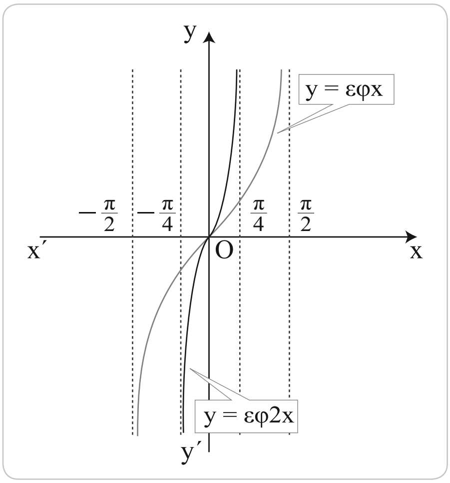
7. Η γραφική παράσταση της $g(x)=1+\text{εφ}x$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=\text{εφ}x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάνω, ενώ της $h(x)=-1+\text{εφ}x$ κατά μια μονάδα προς τα κάτω.



8. Κάθε τιμή της συνάρτησης $f(x)=\text{εφ}2x$ επαναλαμβάνεται, όταν το $2x$ αυξηθεί κατά π, που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το x αυξηθεί κατά $\dfrac{\pi}{2}$.

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = εφ2x$ είναι περιοδική με περίοδο $\frac{\pi}{2}$. Έχοντας υπόψη το στοιχείο αυτό και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = εφ2x$.

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
εφ2x	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

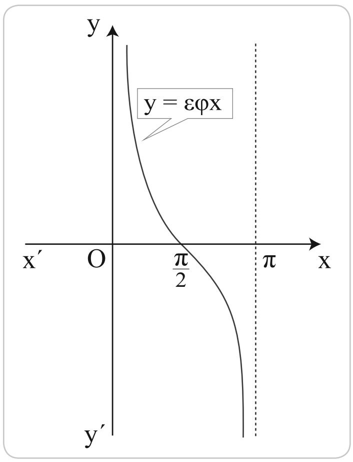


9. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = σφx$ είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $(0, \pi)$. Αν εργαστούμε, όπως και για τη $f(x) = εφx$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = σφx$,

– είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$,

– έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$.

Η γραφική της παράσταση στο $(0, \pi)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Οι καμπύλες του σχήματος είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής $f(x) = \alpha \cdot ημωx$, αφού έχει περίοδο $T = 2\pi$ και μέγιστο ίσο με 1.

Είναι φανερό ότι η πρώτη είναι η $y = ημx$.

– Η περίοδος της δεύτερης ισούται με 4π. Έτσι $\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$, οπότε $\omega = \frac{1}{2}$.

Το πλάτος της δεύτερης ισούται με 1. Άρα η εξίσωσή της είναι η $y = ημ\frac{x}{2}$.

– Η περίοδος της τρίτης ισούται με $\frac{2\pi}{3}$. Έτσι $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$, οπότε $\omega = 3$.

Το πλάτος α της τρίτης ισούται με 1. Άρα η εξίσωσή της είναι η $y = ημ3x$.

ii. Αν εργαστούμε όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι:

– Η εξίσωση της πρώτης είναι η $y = ημx$

– Η εξίσωση της δεύτερης είναι η $y = 3ημx$

– Η εξίσωση της τρίτης είναι η $y = 0{,}5\ ημx$ και

– Η εξίσωση της τέταρτης είναι η $y = -2{,}5ημx$.

2. i. Η υψηλότερη πλημμυρίδα ισούται με 3 m και παρατηρείται όταν $ημ\frac{\pi t}{6} = 1$, ενώ η χαμηλότερη άμπωτη ισούται με –3 m και παρατηρείται όταν $ημ\frac{\pi t}{6} = -1$. Άρα, η ζητούμενη υψομετρική διαφορά ισούται με $3 - (-3) = 6$ m.

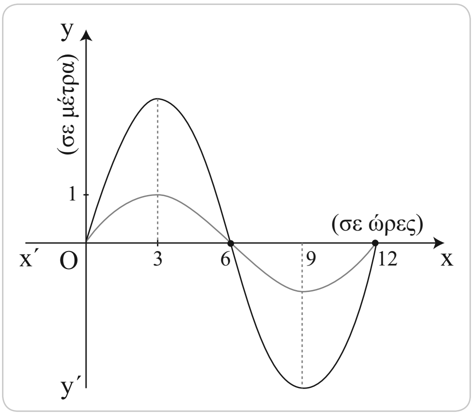
ii. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = -x \cdot ημωt$. Άρα είναι περιοδική με περίοδο:

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12 \text{ ώρες.}$$

Με τη βοήθεια του πίνακα:

t	0	3	6	9	12
$2συν\frac{x}{2}$	0	3	0	–3	2

σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση που δίνεται στο διπλανό σχήμα.

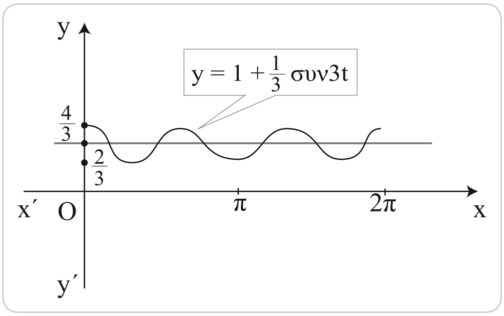


3. i. Το μέγιστο ύψος ισούται με $\left(1+\frac{1}{3}\right)\text{m}=\frac{4}{3}$ m, ενώ το ελάχιστο ύψος ισούται με $\left(1-\frac{1}{3}\right)\text{m}=\frac{2}{3}$ m. Επομένως, η ζητούμενη διαφορά ισούται με $\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)\text{m}=\frac{2}{3}$ m.

ii. Η περίοδος της συνάρτησης ισούται με $\frac{2\pi}{3}$.

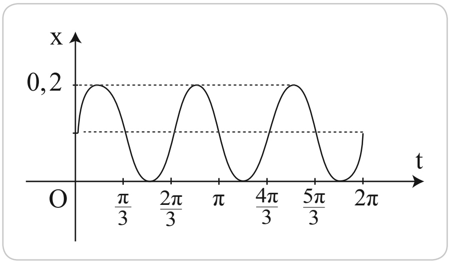
iii. Έχοντας υπόψη τα παραπάνω και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\mathbf{1+\frac{1}{3}}$**συν3t**	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$



4. i. Το πλάτος της κίνησης του πιστονιού ισούται με 0,1 m.

ii.



Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $\frac{2\pi}{3}$ sec. Η γραφική της παράσταση δίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Η επίλυση της εξίσωσης x(t) = 0,15 στο διάστημα [0, 2π] μας δίνει τις λύσεις:

$$\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18},\ \frac{25\pi}{18}\ \text{ και }\ \frac{29\pi}{18}.$$

3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i.** $x = \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $$\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{array}\right.,\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.,\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iii. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$. Διαφορετικά οι λύσεις δίνονται και από τον τύπο $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2},\ \lambda \in \mathbb{Z}$, αφού τα τόξα της μορφής $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2},\ \lambda \in \mathbb{Z}$ έχουν τελική πλευρά στα σημεία Β, Β′ του τριγωνομετρικού κύκλου, όπου $\sigma\upsilon\nu x = 0$.

iv. $$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

2. **i.** $$\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{array}\right.,\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{array}\right.,\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ii. $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$, αφού τα τόξα της μορφής $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ έχουν τελική πλευρά στο σημείο Β′ του τριγωνομετρικού κύκλου όπου $\eta\mu x = -1$.

iii. $$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iv. $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

3. **i.** $\varepsilon\varphi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

ii. $εφx = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\dfrac{π}{6} \Leftrightarrow x = κπ + \dfrac{π}{6},\ κ \in \mathbb{Z}.$

iii. $σφx = 1 \Leftrightarrow σφx = σφ\dfrac{π}{4} \Leftrightarrow x = κπ + \dfrac{π}{4},\ κ \in \mathbb{Z}.$

iv. $σφx = \sqrt{3} \Leftrightarrow σφx = σφ\dfrac{π}{6} \Leftrightarrow x = κπ + \dfrac{π}{6},\ κ \in \mathbb{Z}.$

4. i. $εφx = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = -εφ\dfrac{π}{6} \Leftrightarrow εφx = εφ\left(-\dfrac{π}{6}\right) \Leftrightarrow x = κπ - \dfrac{π}{6},\ κ \in \mathbb{Z}.$

ii. $σφx = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow σφx = -σφ\dfrac{π}{3} \Leftrightarrow σφx = σφ\left(-\dfrac{π}{3}\right) \Leftrightarrow x = κπ - \dfrac{π}{3},\ κ \in \mathbb{Z}.$

5. i. $(1-ημx)\left(2ημx-\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 1-ημx = 0$ ή $2ημx - \sqrt{3} = 0$. Έχουμε:

- $1-ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ + \dfrac{π}{2},\ κ \in \mathbb{Z}$
- $2ημx - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow ημx = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\dfrac{π}{3}$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2κπ + \dfrac{π}{3} \\ \quad ή \\ x = 2κπ + π - \dfrac{π}{3} \end{array}\right.,\ κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2κπ + \dfrac{π}{3} \\ \quad ή \\ x = 2κπ + \dfrac{2π}{3} \end{array}\right.,\ κ \in \mathbb{Z}.$$

ii. $\left(2ημx+\sqrt{2}\right)(1-συνx) = 0 \Leftrightarrow 2ημx + \sqrt{2} = 0$ ή $1 - συνx = 0$. Έχουμε:

- $2ημx + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow ημx = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\left(-\dfrac{π}{4}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2κπ - \dfrac{π}{4} \\ \quad \text{®} \\ x = 2κπ + \dfrac{5π}{4} \end{array}\right.,\ κ \in \mathbb{Z}$
- $1-συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = 1 \Leftrightarrow x = 2κπ,\ κ \in \mathbb{Z}.$

6. i. $\left(\sqrt{3}+εφx\right)(1-εφx) = 0 \Leftrightarrow εφx = -\sqrt{3}$ ή $εφx = 1$. Έχουμε:

- $εφx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\left(-\dfrac{π}{3}\right) \Leftrightarrow x = κπ - \dfrac{π}{3},\ κ \in \mathbb{Z}$
- $εφx = 1 \Leftrightarrow εφx = εφ\left(\dfrac{π}{4}\right) \Leftrightarrow x = κπ + \dfrac{π}{4},\ κ \in \mathbb{Z}.$

ii. $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\varepsilon\varphi^2 x - 3)\cdot \sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \varepsilon\varphi^2 x = 3 \quad \acute{\eta} \quad \sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \quad \acute{\eta} \quad \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \quad \acute{\eta} \quad \sigma\varphi x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \acute{\eta} \quad \sigma\varphi x = \sigma\varphi\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως, οι λύσεις $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ απορρίπτονται γιατί δεν ορίζονται η εφx για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

7. i. Επειδή $0,951 = \eta\mu 72^\circ = \eta\mu\frac{2\pi}{5}$, έχουμε:

$$\eta\mu x = 0,951 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{2\pi}{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{5} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{2\pi}{5} \end{cases},\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{5} \\ \acute{\eta} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{5} \end{cases},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ii. Επειδή $0,809 = \sigma\upsilon\nu 36^\circ = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5}$, έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = -0,809 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{4\pi}{5},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iii. Επειδή $28,636 = \varepsilon\varphi 88^\circ = \varepsilon\varphi\frac{22\pi}{45}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi x = 28,636 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{22\pi}{45} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{22\pi}{45},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

8. i. $2\eta\mu 3x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \acute{\eta} \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases},\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6\kappa\pi + \pi}{9} \\ \acute{\eta} \\ x = \frac{6\kappa\pi + 2\pi}{9} \end{cases},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ii. $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{x}{5}=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow \frac{x}{5}=2\kappa\pi\pm\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{5}=2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=10\kappa\pi+5\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

iii. $3\varepsilon\varphi\frac{2x}{7}-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{2x}{7}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\frac{2x}{7}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{7}=\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 12x=42\kappa\pi+7\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{42\kappa\pi+7\pi}{12},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

9. i. $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

ii. $2\sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \qquad\text{ή} \\ 3x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36x-3\pi=24\kappa\pi+4\pi \\ \qquad\text{ή} \\ 36x-3\pi=24\kappa\pi-4\pi \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{24\kappa\pi+7\pi}{36} \\ \qquad\text{ή} \\ x=\frac{24\kappa\pi-\pi}{36} \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

iii. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-5x\right)=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-5x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 3\pi-60x=12\kappa\pi+4\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{-12\kappa\pi-\pi}{60},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

10. i. Αν θέσουμε $\eta\mu\omega=t,\ -1\le t\le 1$, η εξίσωση γράφεται:

$$2t^2+t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow t=-1 \quad \text{ή} \quad t=\frac{1}{2}.$$

Επομένως:

- Για $t=-1$ έχουμε $\eta\mu\omega=-1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega=\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \omega=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

- Για $t=\frac{1}{2}$ έχουμε $\eta\mu\omega=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\omega=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\omega=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\\ \acute{\eta}\\ \omega=2\kappa\pi-\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\omega=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\quad \acute{\eta}\quad \omega=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\quad \acute{\eta}\quad \omega=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

ii. Αν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu x=t,\ -1\le t\le 1$, η εξίσωση γράφεται:

$$2t^2+3t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{-3\pm 5}{4} \Leftrightarrow t=-2\quad \acute{\eta}\quad t=\frac{1}{2}.$$

- Για $t=-2$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu x=2$ αδύνατη, αφού $-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1$.
- Για $t=\frac{1}{2}$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\quad \acute{\eta}\quad x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

iii. Αν θέσουμε $\varepsilon\varphi t=\omega$, η εξίσωση γράφεται:

$$3\omega^2=3+2\cdot\sqrt{3}\omega \Leftrightarrow 3\omega^2-2\cdot\sqrt{3}\omega-3=0 \Leftrightarrow \omega=\frac{2\sqrt{3}\pm 4\cdot\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \omega=\sqrt{3}\quad \acute{\eta}\quad \omega=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως:

- Για $\omega=\sqrt{3}$, έχουμε $\varepsilon\varphi t=\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

- Για $\omega=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi t=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi t=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow t=\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

11. i. Είναι $\eta\mu^2x+5\sigma\upsilon\nu^2x=4 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2x+5\sigma\upsilon\nu^2x=4 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2x=3$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \acute{\eta}\quad \sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αλλά:

- $\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{3},\ \ \kappa \in \mathbb{Z}$

- $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\lambda\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ \ \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{3}, & \kappa \in \mathbb{Z} \\ \quad\quad ή & \\ x = 2\lambda\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}, & \lambda \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ii. Η εφx και η σφ2x έχουν νόημα εφόσον $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και $\eta\mu 2x \neq 0$, (1).

Με αυτούς τους περιορισμούς, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} \Leftrightarrow \sigma\varphi 2x = \sigma\varphi x \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + x,\ \ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Από τις λύσεις αυτές καμία δεν ικανοποιεί τον περιορισμοί $\eta\mu 2x \neq 0$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

12. i. Η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ παρουσιάζει μέγιστο όταν $\eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ και ελάχιστο όταν $\eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

Αλλά:

- $\eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \ \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi,\ \ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi,\ \ αφού\ \ 0 \leq x \leq 2\pi.$$

- $\eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0,\ \ αφού\ \ 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Επομένως, η f παρουσιάζει [0, 2π) μέγιστο για $x = \pi$, το $f(\pi) = 3$ και ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = -3$.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=7\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ παρουσιάζει μέγιστο όταν $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$ και ελάχιστο όταν $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Αλλά:

- $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu 0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2},\ \text{αφού } 0\le x\le 2\pi.$$

- $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{2}=2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{2},\ \text{αφού } 0\le x\le 2\pi.$$

Επομένως, η g παρουσιάζει [0, 2π) μέγιστο για $x=\frac{\pi}{2}$, το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=7$ και ελάχιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$, το $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-7$.

13. i. Επειδή S = 100 αρκεί να βρούμε το $t\in\{1, 2, \dots, 12\}$ για το οποίο ισχύει:

$$100 = 75 + 50\ \eta\mu\frac{\pi t}{6}.$$

Έχουμε:

$$100=75+50\eta\mu\frac{\pi t}{6} \Leftrightarrow 25=50\eta\mu\frac{\pi t}{6} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi t}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi t}{6}=\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{6}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \qquad ή \\ \frac{\pi t}{6}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=12\kappa+1 \\ \qquad ή \\ t=12\kappa+5 \end{cases},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=1\ \ ή\ \ t=5,\ \text{αφού } 1\le t\le 12.$$

Άρα, οι ζητούμενοι μήνες είναι ο Ιανουάριος και Μάιος.

ii. Το S παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν $\eta\mu\frac{\pi t}{6}$ πάρει τη μεγαλύτερη τιμή του δηλαδή όταν $\eta\mu\frac{\pi t}{6}=1$.

Επειδή $ημ\frac{πt}{6}=1 \Leftrightarrow ημ\frac{πt}{6}=\frac{π}{2} \Leftrightarrow \frac{πt}{6}=2κπ+\frac{π}{2},\ κ\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=12κ+3,\ κ\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=3,$

αφού $1 \le t \le 12$. Άρα, τον μήνα Μάρτιο έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Είναι:

$$ημx+συν\left(\frac{π}{4}-x\right)=0 \Leftrightarrow ημx=-συν\left(\frac{π}{4}-x\right) \Leftrightarrow ημx=συν\left[π-\left(\frac{π}{4}-x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow ημx=συν\left(\frac{3π}{4}+x\right) \Leftrightarrow ημx=συν\left[\frac{π}{2}-\left(\frac{3π}{4}+x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow ημx=ημ\left(-\frac{π}{4}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2κπ+\left(-\frac{π}{4}-x\right),\ κ\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ x=2κπ+π-\left(-\frac{π}{4}-x\right),\ κ\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2κπ-\frac{π}{4},\ κ\in\mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ 0x=2κπ+\frac{5π}{4},\ κ\in\mathbb{Z}\ \ (\text{αδύνατη}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=κπ-\frac{π}{8},\ κ\in\mathbb{Z}.$$

ii. Η εφ2x και $σφ\left(\frac{π}{3}+3x\right)$ έχουν νόημα εφόσον $συν2x \ne 0$ και $ημ\left(\frac{π}{3}+3x\right)\ne 0$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$εφ2x-σφ\left(\frac{π}{3}+3x\right)=0 \Leftrightarrow εφ2x=σφ\left(\frac{π}{3}+3x\right) \Leftrightarrow εφ2x=εφ\left[\frac{π}{2}-\left(\frac{π}{3}+3x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow εφ2x=εφ\left(\frac{π}{6}-3x\right) \Leftrightarrow 2x=κπ+\frac{π}{6}-3x,\ κ\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 5x=κπ+\frac{π}{6},\ κ\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{κπ}{5}+\frac{π}{30},\ κ\in\mathbb{Z},$$

που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

2. i. Η εφx έχει νόημα εφόσον συνx $\neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned}\text{εφ}x\cdot\text{ημ}x+1=\text{ημ}x+\text{εφ}x &\Leftrightarrow (\text{εφ}x\cdot\text{ημ}x-\text{εφ}x)-(\text{ημ}x-1)=0\\ &\Leftrightarrow \text{εφ}x(\text{ημ}x-1)-(\text{ημ}x-1)=0\\ &\Leftrightarrow (\text{ημ}x-1)(\text{εφ}x-1)=0\\ &\Leftrightarrow \text{εφ}x=1 \quad \text{ή} \quad \text{ημ}x=1 \ (\text{αδύνατη, γιατί συν}x\neq 0)\\ &\Leftrightarrow \text{εφ}x=\text{εφ}\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές, αφού προφανώς ικανοποιούν τον περιορισμό συνx $\neq 0$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται, εφόσον x $\neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\text{συν}^2x}-2\text{εφ}x=4\Leftrightarrow 1+\text{εφ}^2x-2\text{εφ}x=4\Leftrightarrow \text{εφ}^2x-2\text{εφ}x-3=0\\ \Leftrightarrow \text{εφ}x=\frac{2\pm4}{2}\Leftrightarrow \text{εφ}x=-1 \quad \text{ή} \quad \text{εφ}x=3.\end{aligned}$$

Αλλά:

- $\text{εφ}x=-1\Leftrightarrow \text{εφ}x=-\text{εφ}\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow \text{εφ}x=\text{εφ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$
- $\text{εφ}x=3\Leftrightarrow \text{εφ}x=\text{εφ}72^{\circ}\Leftrightarrow \text{εφ}x=\text{εφ}\frac{2\pi}{5}\Leftrightarrow x=\lambda\pi+\frac{2\pi}{5},\ \lambda\in\mathbb{Z}.$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x=\lambda\pi+\frac{2\pi}{5},\ \lambda\in\mathbb{Z},$$

αφού προφανώς ικανοποιούν τον περιορισμό συνx $\neq 0$.

3. x $\neq 0$. Είναι $\text{εφ}x=1\Leftrightarrow \text{εφ}x=\text{εφ}\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}x\in(3\pi,4\pi)\Leftrightarrow 3\pi<x<4\pi &\Leftrightarrow 3\pi<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<4\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow 12\pi<4\kappa\pi+\pi<16\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow 11\pi<4\kappa\pi<15\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \frac{11}{4}<\kappa<\frac{15}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \kappa=3.\end{aligned}$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης είναι η $x=3\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{13\pi}{4}$.

4. Έχουμε:

$$1+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\\ \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\\ (1+\sigma\upsilon\nu x)^2+\sigma\upsilon\nu^2 x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\\ 2\sigma\upsilon\nu^2 x+2\sigma\upsilon\nu x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\\ 2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x+1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\\ \sigma\upsilon\nu x=0 \;\text{ ή }\; \sigma\upsilon\nu x=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\eta\mu x=1\\ \sigma\upsilon\nu x=0\end{cases} \;\text{ ή }\; \begin{cases}\eta\mu x=0\\ \sigma\upsilon\nu x=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x=\pi.$$

5. Για $\sigma\upsilon\nu x\neq 0$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\neq 0$ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi x=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+x\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right] \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-x,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6\kappa\pi+\pi}{12},\ \kappa\in\mathbb{Z},\ (1).$$

Επομένως έχουμε:

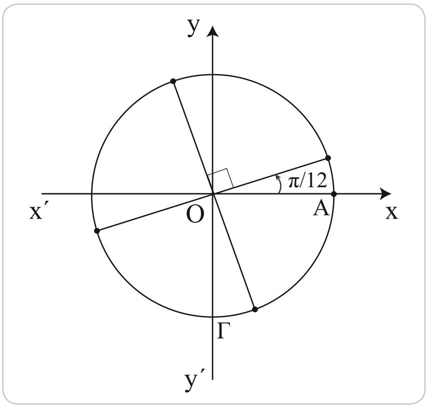
$$0\le x\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le \frac{6\kappa\pi+\pi}{12}<2\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 0\le 6\kappa\pi+\pi\le 24\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\pi\le 6\kappa\pi\le 23\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le\kappa\le\frac{23}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \kappa=0 \quad\text{ή}\quad \kappa=1 \quad\text{ή}\quad \kappa=2 \quad\text{ή}\quad \kappa=3.$$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης στο $[0,\,2\pi)$ είναι οι αριθμοί:

$$\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12} \quad\text{και}\quad \frac{19\pi}{12}.$$



3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. $$συν\frac{π}{12}συν\frac{π}{4}-ημ\frac{π}{12}ημ\frac{π}{4}=συν\left(\frac{π}{12}+\frac{π}{4}\right)=συν\frac{π}{3}=\frac{1}{2}$$

ii. $συν170° \cdot συν50° + ημ170° \cdot ημ50° = συν(170° - 50°) = συν120° = -συν60° = -\frac{1}{2}$.

iii. $$ημ110° \cdot ημ70° - συν110° \cdot συν70° = -[συν110° \cdot συν70° - ημ110° \cdot ημ70°]$$
$$= -συν(110° + 70°) = -συν180° = 1.$$

iv. $$συν\frac{7π}{12}\cdot συν\frac{π}{12}+ημ\frac{7π}{12}\cdot ημ\frac{π}{12}=συν\left(\frac{7π}{12}-\frac{π}{12}\right)=συν\frac{π}{2}=0.$$

2. i. $συν3x \cdot συν(-2x) - ημ3x \cdot ημ(-2x) = συν(3x + (-2x) = συνx$.

ii. $$συν\left(x+\frac{π}{4}\right)συνx+ημ\left(x+\frac{π}{4}\right)ημx=συν\left(\left(x+\frac{π}{4}\right)-x\right)=συν\frac{π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. i. $$συν\left(x+\frac{π}{4}\right)+συν\left(x-\frac{π}{4}\right)=$$
$$=\left(συνx\cdot συν\frac{π}{4}-ημx\cdot ημ\frac{π}{4}\right)+\left(συνx\cdot συν\frac{π}{4}+ημx\cdot ημ\frac{π}{4}\right)$$
$$=2συνx\cdot συν\frac{π}{4}=2συνx\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}συνx.$$

ii. $$συν^2\left(x-\frac{π}{4}\right)-συν^2\left(x+\frac{π}{4}\right)=$$
$$=\left(συνx\cdot συν\frac{π}{4}+ημx\cdot ημ\frac{π}{4}\right)^2-\left(συνx\cdot συν\frac{π}{4}+ημx\cdot ημ\frac{π}{4}\right)^2$$
$$=4συνx\cdot συν\frac{π}{4}\cdot ημx\cdot ημ\frac{π}{4}=4συνx\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot ημx\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2ημx\cdot συνx.$$

4. i. $$ημ\frac{17π}{18}\cdot συν\frac{4π}{9}-συν\frac{17π}{18}\cdot ημ\frac{4π}{9}=ημ\left(\frac{17π}{18}-\frac{4π}{9}\right)=ημ\frac{π}{2}=1.$$

ii. $ημ70° \cdot συν20° + συν70° \cdot ημ20° = ημ(70° + 20°) = ημ90° = 1$.

iii. $\dfrac{\varepsilon\varphi\dfrac{7\pi}{12}-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}}{1+\varepsilon\varphi\dfrac{7\pi}{12}\cdot\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}}=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$

iv. $\dfrac{\varepsilon\varphi165°+\varepsilon\varphi15°}{1-\varepsilon\varphi165°\cdot\varepsilon\varphi15°}=\varepsilon\varphi(165°+15°)=\varepsilon\varphi180°=0.$

5. i. $\eta\mu2x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu2x\cdot\eta\mu x=\eta\mu(2x+x)=\eta\mu3x.$

ii. $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\eta\mu x=\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}.$

iii. $\dfrac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi2x}{1+\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi2x}=\varepsilon\varphi(x-2x)=\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi x.$

iv. $\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)+\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}{1-\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}=\varepsilon\varphi\left(\left(\dfrac{\pi}{3}+2x\right)+\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\right)=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sigma\varphi x.$

6. i. $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}-\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=2\eta\mu x\cdot\frac{1}{2}=\eta\mu x.$$

ii. $(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)\cdot(\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$

$$=(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta)+(\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta)$$

$$=\eta\mu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta).$$

7. • $\eta\mu105°=\eta\mu(60°+45°)=\eta\mu60°\cdot\sigma\upsilon\nu45°+\sigma\upsilon\nu60°\cdot\eta\mu45°$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

• $\sigma\upsilon\nu105°=\sigma\upsilon\nu(60°+45°)=\sigma\upsilon\nu60°\cdot\sigma\upsilon\nu45°-\eta\mu60°\cdot\eta\mu45°$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Οπότε $\varepsilon\varphi105°=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$ και $\sigma\varphi105°=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}.$

- ημ195° = ημ(150° + 45°) = ημ150° · συν45° + συν150° · ημ45°

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

- συν195° = συν(150° + 45°) = συν150° · συν45° – ημ150° · ημ45°

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}.$$

Οπότε $εφ195°=\dfrac{1-\sqrt{3}}{-\left(1+\sqrt{3}\right)}=2-\sqrt{3}$ και $σφ195°=\dfrac{-\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$

8. **i.** $εφα+εφβ=\dfrac{ημα}{συνα}+\dfrac{ημβ}{συνβ}=\dfrac{ημα\cdot συνβ+συνα\cdot ημβ}{συνα\cdot συνβ}=\dfrac{ημ(α+β)}{συνα\cdot συνβ}.$

ii. $σφα+σφβ=\dfrac{συνα}{ημα}+\dfrac{συνβ}{ημβ}=\dfrac{ημα\cdot συνβ+συνα\cdot ημβ}{ημα\cdot ημβ}=\dfrac{ημ(α+β)}{ημα\cdot ημβ}.$

9. Επειδή $ημα=\dfrac{5}{13}$ και $συνβ=\dfrac{3}{5}$, από τη σχέση $ημ^2x + συν^2x = 1$ βρίσκουμε ότι:

$$συνα=\frac{12}{13} \quad \text{και} \quad ημβ=\frac{4}{5}.$$

Έτσι έχουμε:

i. $ημ(α + β) = ημα \cdot συνβ + συνα \cdot ημβ=\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}.$

ii. $συν(α + β) = συνα \cdot συνβ – ημα \cdot ημβ=\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{3}{5}-\dfrac{5}{13}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{65}.$

10. **i.** Σύμφωνα με τους τύπους (2) και (3) αρκεί να υπολογίσουμε το συνα και το ημβ.

Έχουμε λοιπόν:

- $συν^2α = 1 – ημ^2α = 1 -\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$, οπότε $συνα = \dfrac{4}{5}$, αφού $0<α<\dfrac{π}{2}$

- $ημ^2β = 1 – συν^2β = 1 - \dfrac{25}{169}=\dfrac{144}{169}$, οπότε $ημβ = \dfrac{12}{13}$, αφού $\dfrac{π}{2}<β<π.$

Επομένως:

- $ημ(α + β) = ημα \cdot συνβ + συνα \cdot ημβ=\dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{5}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{12}{13}=\dfrac{33}{65},$

• $συν(α+β) = συνα \cdot συνβ - ημα \cdot ημβ = \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{56}{65}$,

οπότε $εφ(α+β) = -\frac{33}{56}$ και $σφ(α+β) = -\frac{56}{33}$.

ii. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.

11. i. $ημx = συν\left(x+\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow ημx = συνx \cdot συν\frac{π}{6} - ημx \cdot ημ\frac{π}{6}$

$$\Leftrightarrow ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}συνx - \frac{1}{2}ημx \Leftrightarrow 2ημx = \sqrt{3}συνx - ημx$$

$$\Leftrightarrow 3ημx = \sqrt{3}συνx \Leftrightarrow εφx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = εφx\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{6},\ κ \in \mathbb{Z}.$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $συνx \neq 0$, και $συν\left(x+\frac{π}{4}\right) \neq 0$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$εφx + εφ\left(\frac{π}{2}+x\right) = -2 \Leftrightarrow εφx + \frac{1+εφx}{1-εφx} = -2 \Leftrightarrow εφx - εφ^2x + 1 + εφx = -2 + 2εφx$$

$$\Leftrightarrow εφ^2x = 3 \Leftrightarrow εφx = \pm\sqrt{3}.$$

Έτσι έχουμε:

• $εφx = \sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{3} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{3},\ κ \in \mathbb{Z}$,

• $εφx = -\sqrt{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\left(-\frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow x = κπ - \frac{π}{3},\ κ \in \mathbb{Z}$.

Όλες οι λύσεις είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

iii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $συν(x-α) \neq 0$. Με τον περιορισμό αυτό και την προϋπόθεση ότι ορίζεται η εφx, δηλαδή $συνx \neq 0$ έχουμε:

$$εφ(x-α) = -2 \Leftrightarrow \frac{εφx - εφα}{1 + εφx \cdot εφα} = -2 \Leftrightarrow \frac{εφx+3}{1-3εφx} = -2 \Leftrightarrow εφx + 3 = -2 + 6εφx$$

$$\Leftrightarrow 5εφx = 5 \Leftrightarrow εφx = 1 \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{4},\ κ \in \mathbb{Z}.$$

Όλες οι λύσεις, είναι δεκτές αφού είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι $\dfrac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}=\dfrac{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}=\dfrac{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta.$

Ώστε $\dfrac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta.$

Ομοίως $\dfrac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma}=\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma$ και $\dfrac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\alpha.$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες βρίσκουμε:

$$\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\gamma-\varepsilon\varphi\alpha=0.$$

2. **Α′ τρόπος**

Έχουμε $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta,\ (1).$

Επομένως:

$$\begin{aligned}&\eta\mu(\alpha+2\beta)=(\eta\mu(\alpha+\beta)+\beta)=\\&=\eta\mu\,(\alpha+\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu\beta\\&=\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu\beta,\ (\text{αφού } \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0)\\&=(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\\&\overset{(1)}{=}(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\beta)=\eta\mu\alpha(\sigma\upsilon\nu^2\beta+\eta\mu^2\beta)=\eta\mu\alpha.\end{aligned}$$

Β′ τρόπος

Έχουμε $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\beta=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

Επομένως $\eta\mu(\alpha+2\beta)=\eta\mu(\alpha+2\kappa\pi+\pi-2\alpha)=\eta\mu\,(\pi-\alpha)=\eta\mu\alpha.$

3. $\eta\mu(x-\alpha)=-2\eta\mu x(x+\alpha)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\alpha=-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\alpha-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\alpha$

$\Leftrightarrow-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\alpha-2\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\alpha\Leftrightarrow3\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\cdot\varepsilon\varphi\alpha$

$\Leftrightarrow3\eta\mu x=3\sigma\upsilon\nu x,$ αφού $\varepsilon\varphi\alpha=-3$

$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

και επειδή $0\le x\le2\pi$ τότε $x=\dfrac{\pi}{4}$ ή $x=\dfrac{5\pi}{4}.$

4. Επειδή $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ θα είναι $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$, οπότε $\varepsilon\varphi\beta=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi\alpha}=\dfrac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}$.

Επομένως $(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot(1+\varepsilon\varphi\beta)=(1+\varepsilon\varphi\alpha)\cdot\left(1+\dfrac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha}\right)=1+\varepsilon\varphi\alpha+1-\varepsilon\varphi\alpha=2.$

5. **i.** Αν με φ συμβολίσουμε τη γωνία ΑΒΔ, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\varphi=\frac{(\mathrm{A\Delta})}{(\mathrm{AB})}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\mathrm{AB})}=\frac{1}{3}\varepsilon\varphi\mathrm{B},\quad \text{δηλαδή}\quad \varepsilon\varphi\varphi=\frac{\varepsilon\varphi\mathrm{B}}{3},\ (1).$$

Επομένως $\varepsilon\varphi\omega=\varepsilon\varphi(\mathrm{B}-\varphi)=\dfrac{\varepsilon\varphi\mathrm{B}-\varepsilon\varphi\varphi}{1+\varepsilon\varphi\mathrm{B}\cdot\varepsilon\varphi\varphi}\overset{(1)}{=}\dfrac{\varepsilon\varphi\mathrm{B}-\frac{\varepsilon\varphi\mathrm{B}}{3}}{1+\varepsilon\varphi\mathrm{B}\cdot\frac{\varepsilon\varphi\mathrm{B}}{3}}=\dfrac{2\varepsilon\varphi\mathrm{B}}{3+\varepsilon\varphi^2\mathrm{B}}.$

ii. Αν Β = 60°, τότε από την παραπάνω ισότητα βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{2\cdot\varepsilon\varphi60^\circ}{3+\varepsilon\varphi^2 60^\circ}\overset{(1)}{=}\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3+3}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \text{οπότε}\ \omega=30^\circ.$$

Επομένως, η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β.

6. Έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\eta\mu\mathrm{A}+\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)}=\varepsilon\varphi\mathrm{B}\Leftrightarrow\frac{\eta\mu(\mathrm{B}+\Gamma)+\eta\mu(\mathrm{B}-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}-\Gamma)}=\frac{\eta\mu\mathrm{B}}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\eta\mu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\mathrm{B}\cdot\eta\mu\Gamma}=\frac{\eta\mu\mathrm{B}}{\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma=\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\mathrm{B}\cdot\eta\mu\Gamma$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\mathrm{B}\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu\mathrm{B}\cdot\eta\mu\Gamma=0$$

$$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(\mathrm{B}+\Gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{B}+\Gamma=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}.$$

7. **i.** Επειδή Α + Β + Γ = π, έχουμε διαδοχικά:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}=\pi-\Gamma\Leftrightarrow\sigma\varphi(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\sigma\varphi(\pi-\Gamma)\Leftrightarrow\frac{\sigma\varphi\mathrm{A}\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}-1}{\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\mathrm{A}}=-\sigma\varphi\Gamma$$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi\mathrm{A}\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}-1=-\sigma\varphi\mathrm{B}\cdot\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi\mathrm{A}\cdot\sigma\varphi\Gamma$$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi\mathrm{A}\cdot\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\mathrm{B}\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\mathrm{A}\cdot\sigma\varphi\mathrm{A}=1.$$

ii. Επειδή Α + (Β + Γ) = π, είναι συνΑ = –συν(Β + Γ), οπότε:

$$\frac{συνΑ}{ημΒ \cdot ημΓ} = \frac{-συν(Β+Γ)}{ημΒ \cdot ημΓ} = \frac{ημΒ \cdot ημΓ - συνΒ \cdot συνΓ}{ημΒ \cdot ημΓ} = 1 - σφΒ \cdot σφΓ.$$

Ομοίως $\frac{συνΒ}{ημΓ \cdot ημΑ} = 1 - σφΓ \cdot σφΑ$ και $\frac{συνΓ}{ημΑ \cdot ημΒ} = 1 - σφΑ \cdot σφΒ$,

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη, λόγω της **i.**, βρίσκουμε το ζητούμενο.

8. Η εξίσωση είναι ορισμένη για κάθε $x \in [0, π]$, με $συν\left(\frac{π}{4} - x\right) \neq 0$ και $συν\left(\frac{π}{4} + x\right) \neq 0$.

Με τους περιορισμούς αυτούς και με την προϋπόθεση ότι ορίζεται η εφx, η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{εφ\frac{π}{4} + εφx}{1 - εφ\frac{π}{4} \cdot εφx} - \frac{εφ\frac{π}{4} - εφx}{1 + εφ\frac{π}{4} \cdot εφx} = 2\sqrt{3} \iff \frac{1 + εφx}{1 - εφx} - \frac{1 - εφx}{1 + εφx} = 2\sqrt{3}$$

$$\iff (1 + εφx)^2 - (1 - εφx)^2 = 2\sqrt{3}\left(1 - εφ^2 x\right)$$

$$\iff εφ^2 x + 2εφx + 1 - εφ^2 x + 2εφx - 1 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}εφ^2 x$$

$$\iff 2\sqrt{3}εφ^2 x + 4εφx - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\iff \sqrt{3}εφ^2 x + 2εφx - \sqrt{3} = 0$$

$$\iff εφx = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad ή \quad εφx = -\sqrt{3} \quad (\text{αφού } Δ = 16)$$

$$\iff x = \frac{π}{6} \quad ή \quad x = \frac{2π}{3} \quad (\text{αφού } 0 \leq x \leq π),$$

που είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

....

Αν δεν ορίζεται η εφx, δηλαδή αν $x = \frac{π}{2}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

....

9. Αρκεί να δείξουμε ότι $x + y = \frac{π}{4} - z$. Επειδή εφx < 1 και εφy < 1 και εφz < 1, θα είναι:

$$εφx < εφ\frac{π}{4}, \quad εφy < εφ\frac{π}{4} \quad \text{και} \quad εφz < εφ\frac{π}{4}$$

και επειδή η συνάρτηση εφ↑, τότε $0 < x, y, z < \frac{π}{4}$, οπότε:

$$0 < x + y < \frac{π}{2} \quad \text{και} \quad 0 < \frac{π}{4} - z < \frac{π}{4}.$$

Επομένως, η $x+y=\frac{\pi}{4}-z$ γράφεται διαδοχικά:

$$x+y=\frac{\pi}{4}-z \Leftrightarrow εφ(x+y)=εφ\left(\frac{\pi}{4}-z\right) \Leftrightarrow \frac{εφx+εφy}{1-εφx\cdot εφy}=\frac{1-εφx}{1+εφx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{1-\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{8}} \Leftrightarrow \frac{7}{9}=\frac{7}{9},\ \text{που ισχύει.}$$

3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i.** $2ημ\frac{3\pi}{4}συν\frac{3\pi}{4}=ημ\left(2\cdot\frac{3\pi}{4}\right)=ημ\frac{3\pi}{2}=-1.$

ii. $1-2ημ^2\frac{\pi}{12}=συν\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=συν\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

iii. $2συν^2 135°-1=συν(2\cdot 135°)=συν270°=0.$

iv. $\frac{2εφ75°}{1-εφ^2 75°}=εφ(2\cdot 75°)=εφ150°=-εφ30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

2. **i.** $2ημ2α\cdot συν2α=ημ(2\cdot 2α)=ημ4α.$

ii. $2συν^2\left(\frac{\pi}{4}-α\right)-1=συν\left(2\left(\frac{\pi}{4}-α\right)\right)=συν\left(\frac{\pi}{2}-2α\right)=ημ2α.$

iii. $\frac{2εφ3α}{1-εφ^2 3α}=εφ(2\cdot 3α)=εφ6α.$

3. **i.** $ημ^2α+συν2α=ημ^2α+(1-2ημ^2α)=1-ημ^2α=συν^2α.$

ii. $\frac{ημ2α}{1-ημ^2α}\Leftrightarrow\frac{2ημασυνα}{συν^2α}=2\frac{ημα}{συνα}=2εφα.$

iii. $σφα-εφα=\frac{συνα}{ημα}-\frac{ημα}{συνα}=\frac{συν^2α-ημ^2α}{ημασυνα}=\frac{συν2α}{\frac{1}{2}ημ2α}=2σφ2α.$

iv. $εφα+σφα=\frac{ημα}{συνα}+\frac{συνα}{ημα}=\frac{ημ^2α+συν^2α}{ημα\cdot συνα}=\frac{1}{\frac{1}{2}ημ2α}=\frac{2}{ημ2α}.$

4. i. Σύμφωνα με τους τύπους (1) και (2) αρκεί να υπολογίσουμε το ημα.

Έχουμε, λοιπόν, $ημ^2α = 1 - συν^2α = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$. Άρα $ημα = -\frac{3}{5}$, αφού $π < \pm < \frac{3π}{2}$.

Επομένως:

$$ημ2α = 2ημα \cdot συνα = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}, \quad συν2α = 2συν^2α - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25},$$

οπότε $εφ2α = \frac{ημ2α}{συν2α} = \frac{24}{7}$ και $σφ2α = \frac{1}{εφ2α} = \frac{7}{24}$.

ii. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Βρίσκουμε:

$$ημ2α = -\frac{24}{25}, \quad συν2α = \frac{7}{25}, \quad εφ2α = -\frac{24}{7}, \quad σφ2α = -\frac{7}{24}.$$

5. Επειδή $εφ(α + 2β) = \frac{εφα + εφ2β}{1 - εφα \cdot εφ2β}$, αρκεί να υπολογίσουμε την εφ2β. Έχουμε, λοιπόν,

$$εφ2β = \frac{2εφβ}{1 - εφ^2β} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4}, \text{ οπότε } εφ(α + 2β) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{3}{16}} = \frac{1}{\frac{13}{16}} = \frac{16}{13}.$$

6. i. $ημ^3α \cdot συνα + συν^3α \cdot ημα = ημα \cdot συνα(ημ^2α + συν^2α) = ημα \cdot συνα = \frac{1}{2}ημ2α$.

ii. $ημ2α \cdot εφα + 2συν^2α = 2ημα \cdot συνα \cdot \frac{ημα}{συνα} + 2συν^2α = 2(ημ^2α + συν^2α) = 2$.

iii. $\frac{ημ2α}{1 + συν2α} = \frac{2ημα \cdot συνα}{1 + 2συν^2α - 1} = \frac{2ημα \cdot συνα}{2συν^2α} = \frac{ημα}{συνα} = εφα$.

iv. $\frac{1 - συν2α + ημ2α}{1 + συν2α + ημ2α} = \frac{1 - (1 - 2ημ^2α) + 2ημα \cdot συνα}{1 + (2συν^2α - 1) + 2ημα \cdot συνα}$

$$= \frac{2ημ^2α + 2ημα \cdot συνα}{2συν^2α + 2ημα \cdot συνα} = \frac{2ημα(ημα + συνα)}{2συνα(συνα + ημα)} = εφα.$$

7. i. $συν2x - ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2ημ^2x - ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow 2ημ^2x + ημx = 0$

$$\Leftrightarrow ημx \cdot (2ημx + 1) = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \quad ή \quad ημx = -\frac{1}{2}.$$

Έτσι, έχουμε:

- $ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = ημ0 \Leftrightarrow x = 2κπ$ ή $x = 2κπ + π$, $κ \in \mathbb{Z}$. Τελικά $x = λπ$, $λ \in \mathbb{Z}$.

- $ημx=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx=-ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow ημx=ημ\left(-\frac{π}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow x=2κπ-\frac{π}{6} \quad ή \quad x=2κπ+\frac{7π}{6},\ κ\in\mathbb{Z}.$$

ii. $ημ2x-2συνx+ημx-1=0 \Leftrightarrow 2ημx\cdot συνx-2συνx+ημx-1=0$

$$\Leftrightarrow 2συνx\cdot(ημx-1)+(ημx-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (ημx-1)\cdot(2συνx+1)=0 \Leftrightarrow ημx=1 \quad ή \quad συνx=-\frac{1}{2}.$$

Έτσι, έχουμε:

- $ημx=1 \Leftrightarrow ημx=ημ\frac{π}{2} \Leftrightarrow x=2κπ+\frac{π}{2},\ κ\in\mathbb{Z},$
- $συνx=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx=-συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow συνx=συν\frac{2π}{3} \Leftrightarrow x=2κπ\pm\frac{2π}{3},\ κ\in\mathbb{Z}.$

8. Στο παράδειγμα 1 της σελίδας 19 βρήκαμε ότι:

$$ημ\frac{π}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\quad συν\frac{π}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad εφ\frac{π}{8}=\sqrt{2}-1 \quad και \quad σφ\frac{π}{8}=\sqrt{2}+1.$$

Σύμφωνα με τους τύπους (4) και (5) έχουμε:

- $ημ^2\frac{π}{16}=\frac{1-συν\frac{π}{8}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$, οπότε $ημ\frac{π}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$
- $συν^2\frac{π}{16}=\frac{1+συν\frac{π}{8}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$, οπότε $συν\frac{π}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$

Συνεπώς $εφ\frac{π}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ και $σφ\frac{π}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$

9. Σύμφωνα με τους τύπους (4) και (5) έχουμε:

i.
- $ημ^2\frac{α}{2}=\frac{1-συνα}{2}=\frac{1-\frac{5}{13}}{2}=\frac{8}{26}=\frac{4}{13}$, οπότε $ημ\frac{α}{2}=\sqrt{\frac{4}{13}}$, αφού $0<\frac{α}{2}<\frac{π}{4}.$
- $συν^2\frac{α}{2}=\frac{1+συνα}{2}=\frac{1+\frac{5}{13}}{2}=\frac{18}{26}=\frac{9}{13}$, οπότε $συν\frac{α}{2}=\sqrt{\frac{9}{13}}$, αφού $0<\frac{α}{2}<\frac{π}{4}.$

Επομένως $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ και $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}$.

ii. • $\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, οπότε $\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{5}}$, αφού $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<$ À

• $\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{4}{5}}$, αφού $\frac{3\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<$ À

Επομένως $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{1}{2}$ και $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}=-2$.

10. i. $\sigma\upsilon\nu 2x+2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x-1+1+2\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu x=0$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\left(2\sigma\upsilon\nu x+1\right)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}.$$

Έτσι, έχουμε:

• $\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$. Τελικά $x=\lambda\pi+\frac{\pi}{2},\ \lambda\in\mathbb{Z}$.

• $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

ii. $\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x-\left(1-\sigma\upsilon\nu x\right)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=1$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

iii. $2-\sigma\upsilon\nu^2x=4\eta\mu^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2-\sigma\upsilon\nu^2x=2(1-\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow 2-\sigma\upsilon\nu^2x=2-2\sigma\upsilon\nu x$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x-2\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=2, \text{ (αδύνατη)}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Τελικά $x=\lambda\pi+\frac{\pi}{2},\ \lambda\in\mathbb{Z}$.

iv. $\sigma\upsilon\nu^2x-1=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x-1=1+\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x-\sigma\upsilon\nu x-2=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\frac{1\pm 3}{2}$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=2\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\pi\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x=2$ είναι αδύνατη, διότι $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι ημ2α = 2ημα · συνα. Άρα, έχουμε:

$$(\text{συν}\alpha - \text{ημ}\alpha)^2 = \text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\alpha - 2\text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\alpha = 1 - 2\text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\alpha = 1 - \text{ημ}2\alpha.$$

Επειδή $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$ έχουμε $0 \le \text{ημ}\alpha \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \text{συν}\alpha \le 1$.

Επομένως συνα – ημα > 0, οπότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

$$\text{συν}\alpha - \text{ημ}\alpha = \sqrt{1-\text{ημ}2\alpha}.$$

2. $$\frac{\text{ημ}^2\alpha + 1 - \text{συν}^2\alpha}{\text{ημ}\alpha(1+\text{συν}\alpha)} = \frac{2\text{ημ}^2\alpha}{\text{ημ}\alpha(1+\text{συν}\alpha)} = \frac{2\text{ημ}\alpha}{(1+\text{συν}\alpha)} = \frac{4\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\text{συν}\frac{\alpha}{2}}{2\text{συν}^2\frac{\alpha}{2}} = 2\cdot\frac{\text{ημ}\frac{\alpha}{2}}{\text{συν}\frac{\alpha}{2}} = 2\text{εφ}\frac{\alpha}{2}.$$

3. Επειδή $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2}$, είναι $\text{συν}\dfrac{3\pi}{8} = \text{ημ}\dfrac{\pi}{8}$. Άρα:

$$\text{ημ}^2\frac{\pi}{8} - \text{συν}^4\frac{3\pi}{8} = \text{ημ}^2\frac{\pi}{8} - \text{ημ}^4\frac{\pi}{8} = \text{ημ}^2\frac{\pi}{8}\cdot\left(1-\text{ημ}^2\frac{\pi}{8}\right) = \text{ημ}^2\frac{\pi}{8}\cdot\text{συν}^2\frac{\pi}{8}$$

$$= \left(\text{ημ}\frac{\pi}{8}\cdot\text{συν}\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\text{ημ}\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

4. i. $$\frac{1+\text{εφ}\alpha\cdot\text{εφ}2\alpha}{\text{εφ}\alpha + \text{σφ}\alpha} = \frac{1+\text{εφ}\alpha\cdot\dfrac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}}{\text{εφ}\alpha + \dfrac{1}{\text{εφ}\alpha}} = \frac{\dfrac{1+\text{εφ}^2\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}}{\dfrac{\text{εφ}^2\alpha+1}{\text{εφ}\alpha}} = \frac{\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} = \frac{1}{2}\text{εφ}2\alpha.$$

ii. $$\frac{3-4\text{συν}2\alpha+\text{συν}4\alpha}{3+4\text{συν}2\alpha+\text{συν}4\alpha} = \frac{3-4\left(1-2\text{ημ}^2\alpha\right)+\left(1-2\text{ημ}^2 2\alpha\right)}{3+4\left(2\text{συν}^2\alpha-1\right)+\left(1-2\text{ημ}^2 2\alpha\right)}$$

$$= \frac{8\text{ημ}^2\alpha - 2\text{ημ}^2 2\alpha}{8\text{συν}^2\alpha - 2\text{ημ}^2 2\alpha} = \frac{8\text{ημ}^2\alpha - 2(2\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\alpha)^2}{8\text{συν}^2\alpha - 2(2\text{ημ}\alpha\cdot\text{συν}\alpha)^2}$$

$$= \frac{8\text{ημ}^2\alpha\left(1-\text{συν}^2\alpha\right)}{8\text{συν}^2\alpha\left(1-\text{ημ}^2\alpha\right)} = \frac{\text{ημ}^2\alpha\cdot\text{ημ}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha\cdot\text{συν}^2\alpha} = \text{εφ}^4\alpha.$$

5. $$εφ(45° - α) = \frac{εφ45° - εφα}{1 + εφ45° \cdot εφα} = \frac{1 - εφα}{1 + εφα} = \frac{1 - \frac{ημα}{συνα}}{1 + \frac{ημα}{συνα}} = \frac{συνα - ημα}{συνα + ημα}$$

$$= \frac{(συνα - ημα)(συνα + ημα)}{(συνα + ημα)^2} = \frac{συν^2α - ημ^2α}{συν^2α + ημ^2α + 2ημα \cdot συνα}$$

$$= \frac{συν2α}{1 + ημ2α} = \frac{συν2α \cdot (1 - ημ2α)}{(1 + ημ2α)(1 - ημ2α)} = \frac{συν2α \cdot (1 - ημ2α)}{1 - ημ^2 2α}$$

$$= \frac{συν2α \cdot (1 - ημ2α)}{συν^2 2α} = \frac{1 - ημ2α}{συν2α} = \frac{1}{συν2α} - \frac{ημ2α}{συν2α} = \frac{1}{συν2α} - εφ2α.$$

Από τον τύπο $εφ(45° - α) = \frac{συν2α}{1 + ημ2α}$, για $α = 30°$ παίρνουμε:

$$εφ15^{o} = \frac{συν60°}{1 + ημ60°} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right)} = 2 - \sqrt{3}.$$

6. i. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $συν2x \neq 0$. Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$εφ2x = 2συνx \Leftrightarrow \frac{ημ2x}{συν2x} = 2συνx \Leftrightarrow \frac{2ημx \cdot συνx}{1 - 2ημ^2x} = 2συνx$$

$$\Leftrightarrow ημx \cdot συνx = συνx - 2ημ^2x \cdot συνx \Leftrightarrow συνx\left(2ημ^2x + ημx - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow συνx = 0 \quad ή \quad 2ημ^2x + ημx - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow συνx = 0 \quad ή \quad ημx = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Έτσι, έχουμε:

- $συνx = 0 \Leftrightarrow x = 2κπ \pm \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$. Τελικά $x = λπ + \frac{π}{2}$, $λ \in \mathbb{Z}$.
- $ημx = -1 \Leftrightarrow ημx = ημ\left(-\frac{π}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2κπ - \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$.
- $ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x = 2κπ + \frac{π}{6} \quad ή \quad x = 2κπ + \frac{5π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

Όλες οι ρίζες που βρήκαμε είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με συν$x \neq 0$ και συν$2x \neq 0$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\text{εφ}x - \text{εφ}2x = -3 \Leftrightarrow \text{εφ}x \cdot \frac{2\text{εφ}x}{1-\text{εφ}^2 x} = -3 \Leftrightarrow 2\text{εφ}^2 x = -3 + 3\text{εφ}^2 x$$

$$\Leftrightarrow \text{εφ}^2 x = 3 \Leftrightarrow \text{εφ}x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \text{εφ}x = -\sqrt{3}.$$

Έτσι, έχουμε:

- $\text{εφ}x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{εφ}x = \text{εφ}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$
- $\text{εφ}x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \text{εφ}x = \text{εφ}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$

Όλες οι ρίζες που βρήκαμε είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

7. $\text{συν}4\alpha = 2\text{συν}^2 2\alpha - 1 = 2(\text{συν}2\alpha)^2 - 1 = 2(2\text{συν}^2\alpha - 1)^2 - 1$

$= 2(4\text{συν}^4\alpha - 4\text{συν}^2\alpha + 1) - 1 = 8\text{συν}^4\alpha - 8\text{συν}^2\alpha + 1.$

8. i. Είναι $\text{συν}^4\frac{\pi}{8} = \left(\text{συν}^2\frac{\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+\text{συν}\frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+4\sqrt{2}}{16} = \frac{3+2\sqrt{2}}{8}$$

και $\text{συν}^4\frac{3\pi}{8} = \left(\text{συν}^2\frac{3\pi}{8}\right)^2 = \left(\frac{1+\text{συν}\frac{3\pi}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^{-2} = \frac{6-4\sqrt{2}}{16} = \frac{3-2\sqrt{2}}{8},$$

οπότε με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$\text{συν}^4\frac{\pi}{8} + \text{συν}^4\frac{3\pi}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

ii. $\eta\mu^4\dfrac{\pi}{8}+\eta\mu^4\dfrac{3\pi}{8}=\eta\mu^4\dfrac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\dfrac{\pi}{8}=\left(\eta\mu^2\dfrac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\pi}{8}\right)^2-2\eta\mu^2\dfrac{\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\pi}{8}$

$$=1-\frac{1}{2}\left(2\eta\mu\frac{\pi}{8}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)^2=1-\frac{1}{2}\eta\mu^2\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

iii. $8\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha=2\cdot(2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=2(\eta\mu2\alpha)^2=2\eta\mu^2 2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu4\alpha.$

9. Σύμφωνα με τον τύπο (6) έχουμε:

$$\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}}{1+\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}}=\frac{\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{\beta+\gamma}}{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma}}=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Ομοίως, έχουμε $\varepsilon\varphi^2\dfrac{y}{2}=\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$ και $\varepsilon\varphi^2\dfrac{z}{2}=\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$.

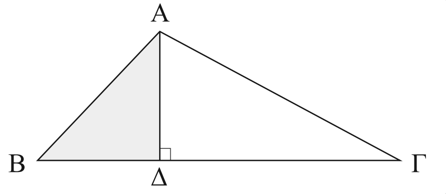
Επομένως $\varepsilon\varphi^2\dfrac{x}{2}+\varepsilon\varphi^2\dfrac{y}{2}+\varepsilon\varphi^2\dfrac{z}{2}=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}+\dfrac{\alpha+\gamma-\beta}{\alpha+\beta+\gamma}+\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=1.$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. • Επειδή $\varepsilon\varphi B = \dfrac{A\Delta}{B\Delta}$ και $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$,

έχουμε:

$$B\Delta = \frac{A\Delta}{\varepsilon\varphi B} \quad \text{και} \quad \Gamma\Delta = \frac{A\Delta}{\varepsilon\varphi\Gamma}.$$



Άρα $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = \dfrac{A\Delta}{\varepsilon\varphi B} + \dfrac{A\Delta}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \dfrac{A\Delta\cdot\varepsilon\varphi\Gamma + A\Delta\cdot\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma} = A\Delta\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma}$,

οπότε $B\Gamma = A\Delta\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma}$, (1).

Αλλά ΒΓ = 2 · ΑΔ. Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$2\cdot A\Delta = A\Delta\cdot\frac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow 2 = \frac{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = 2\cdot\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma.$$

• Επειδή $\varepsilon\varphi B = \dfrac{1}{\sigma\varphi B}$ και $\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{1}{\sigma\varphi\Gamma}$, η **i** γράφεται:

$$\frac{1}{\sigma\varphi B} + \frac{1}{\sigma\varphi\Gamma} = 2\cdot\frac{1}{\sigma\varphi B}\cdot\frac{1}{\sigma\varphi\Gamma} \Leftrightarrow \sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi B = 2.$$

2. Επειδή $\eta\mu^2 B = \dfrac{\varepsilon\varphi^2 B}{1+\varepsilon\varphi^2 B}$ και $\eta\mu^2\Gamma = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\Gamma}{1+\varepsilon\varphi^2\Gamma}$, έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \frac{\dfrac{\varepsilon\varphi^2 B}{1+\varepsilon\varphi^2 B}}{\dfrac{\varepsilon\varphi^2\Gamma}{1+\varepsilon\varphi^2\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma} = \frac{\varepsilon\varphi^2 B\left(1+\varepsilon\varphi^2\Gamma\right)}{\varepsilon\varphi^2\Gamma\left(1+\varepsilon\varphi^2 B\right)} \Leftrightarrow 1 = \frac{\varepsilon\varphi B\left(1+\varepsilon\varphi^2\Gamma\right)}{\varepsilon\varphi\Gamma\left(1+\varepsilon\varphi^2 B\right)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi B\left(1+\varepsilon\varphi^2\Gamma\right) = \varepsilon\varphi\Gamma\left(1+\varepsilon\varphi^2 B\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi^2\Gamma = \varepsilon\varphi\Gamma + \varepsilon\varphi^2 B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma$$

$$\Leftrightarrow \left(\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi\Gamma\right) + \left(\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi^2\Gamma - \varepsilon\varphi^2 B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi\Gamma\right) - \varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma\left(\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi\Gamma\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi\Gamma\right)\left(1 - \varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi\Gamma \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow B = \Gamma \ [\text{γιατί } 0° < B, \Gamma < 180°] \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi B = \sigma\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi(90° - \Gamma)$$

$$\Leftrightarrow B = \Gamma \quad \text{ή} \quad B = 90° - \Gamma \quad [\text{γιατί } 0° < B, \Gamma < 180°]$$

$$\Leftrightarrow B = \Gamma \quad \text{ή} \quad A = 90°.$$

Δηλαδή, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

3. Αρκεί να δείξουμε ότι η απόσταση του M(x, y) από το K(1,3) ισούται με 2, δηλαδή ότι:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=2 \quad \text{ή} \quad (x-1)^2+(y-3)^2=4.$$

Πράγματι, επειδή $x = 1 + 2συνt$, $y = 3 + 2ημt$, έχουμε:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(2\cdot συνt)^2+(2\cdot ημt)^2=4συν^2t+4ημ^2t=4\left(συν^2t+ημ^2t\right)=4\cdot 1=4.$$

4. i. Η εξίσωση ορίζεται, εφόσον $συνx \neq 0$ και $ημx \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1+ημx}{συνx}+\frac{συνx}{1+ημx}=4 &\Leftrightarrow (1+ημx)^2+συν^2x=4συνx(1+ημx)\\
&\Leftrightarrow 1+2ημx+\underbrace{ημ^2x+συν^2x}_{1}=4συνx+4ημx\cdot συνx\\
&\Leftrightarrow 2+2ημx-4συνx-4ημx\cdot συνx=0\\
&\Leftrightarrow 1+ημx-2συνx-2ημx\cdot συνx=0\\
&\Leftrightarrow (1+ημx)-2συνx(1+ημx)=0 \Leftrightarrow (1+ημx)(1-2συνx)=0\\
&\Leftrightarrow 1-2συνx=0 \quad [\text{γιατί, λόγω περιορισμού, ισχύει } ημx \neq -1]\\
&\Leftrightarrow συνx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx=συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=2κ\pi\pm\frac{\pi}{3},\ κ\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

ii. Η εξίσωση ορίζεται εφόσον $ημx \neq 0$ και $ημx \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{συνx\cdot σφx}{1-ημx}=3 &\Leftrightarrow συνx\cdot σφx=3-3ημx \Leftrightarrow συνx\cdot\frac{συνx}{ημx}=3-3ημx\\
&\Leftrightarrow συν^2x=3ημx-3ημ^2x \Leftrightarrow 1-ημ^2x=3ημx-3ημ^2x\\
&\Leftrightarrow 2ημ^2x-3ημx+1=0 \Leftrightarrow ημx=\frac{3\pm 1}{4}\\
&\Leftrightarrow ημx=\frac{1}{2} \quad [\text{αφού, λόγω περιορισμού, είναι } ημx \neq 1]\\
&\Leftrightarrow ημx=ημ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2κ\pi+\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ x=2κ\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{array}\right.,\ κ\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=2κ\pi+\frac{\pi}{6}\\ \text{ή}\\ x=2κ\pi+\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.,\ κ\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές, αφού ικανοποιούν τους περιορισμούς.

5. **i.** Επειδή $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ισχύει εφx > 0. Επομένως, έχουμε:

$$εφx + σφx \geq 2 \Leftrightarrow εφx + \frac{1}{εφx} \geq 2 \Leftrightarrow εφ^2x + 1 \geq 2εφx$$

$$\Leftrightarrow εφ^2x - 2εφx + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (εφx - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

ii. Επειδή $0 \leq α < β < \frac{\pi}{2}$, ισχύει συνα > 0, συνβ > 0 και εφα < εφβ, (1).

Αρκεί να αποδείξουμε $εφα < \frac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ}$ και $\frac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ} < εφβ$.

- $εφα < \dfrac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ} \Leftrightarrow \dfrac{ημα}{συνα} < \dfrac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ}$

$$\Leftrightarrow ημα \cdot (συνα + συνβ) < συνα \cdot (ημα + ημβ)$$

$$\Leftrightarrow ημα \cdot συνα + ημα \cdot συνβ < ημα \cdot συνα + συνα \cdot ημβ$$

$$\Leftrightarrow ημα \cdot συνβ < συνα \cdot ημβ \Leftrightarrow \frac{ημα \cdot συνβ}{συνα \cdot συνβ} < \frac{συνα \cdot ημβ}{συνα \cdot συνβ}$$

$$\Leftrightarrow εφα < εφβ, \text{ που ισχύει.}$$

- $\dfrac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ} < εφβ \Leftrightarrow \dfrac{ημα + ημβ}{συνα + συνβ} < \dfrac{ημβ}{συνβ} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow εφα < εφβ$, που ισχύει.

6. Έχουμε:

$$2συν\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = 1 \Leftrightarrow συν\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συν\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = συν\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - 2x = 2κ\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{3} - 2x = 2κ\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -κ\pi \\ \text{ή} \\ 2x = -2κ\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -κ\pi \\ \text{ή} \\ x = -κ\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}.$$

Διακρίνουμε, τώρα, τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x = -\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε έχουμε:

$$x \in (4\pi, 5\pi) \Leftrightarrow 4\pi < x < 5\pi \Leftrightarrow 4\pi < -\kappa\pi < 5\pi \Leftrightarrow 4 < -\kappa < 5 \Leftrightarrow -5 < \kappa < -4,$$

αδύνατο αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Άρα, δεν υπάρχουν λύσεις της μορφής $x = -\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ στο διάστημα $(4\pi, 5\pi)$.

- Αν $x = -\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$, τότε έχουμε:

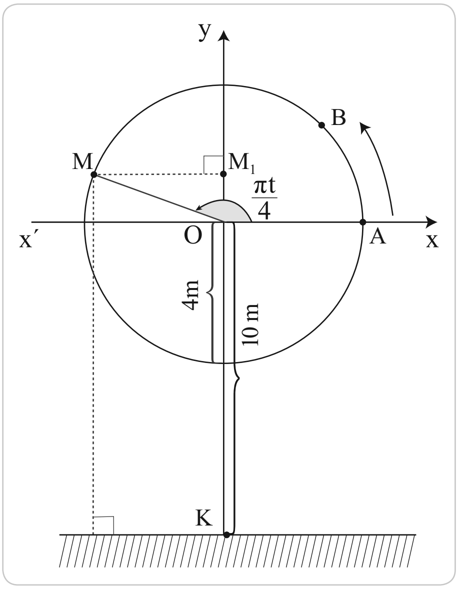
$$x \in (4\pi, 5\pi) \Leftrightarrow 4\pi < -\kappa\pi + \frac{\pi}{3} < 5\pi \Leftrightarrow 12\pi < -3\kappa\pi + \pi < 15\pi$$

$$\Leftrightarrow 11\pi < -3\kappa\pi < 14\pi \Leftrightarrow 11 < -3\kappa < 14 \Leftrightarrow -\frac{14}{3} < \kappa < -\frac{11}{3} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \kappa = -4.$$

Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση της μορφής $x = -\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$ στο διάστημα $(4\pi, 5\pi)$, την $x = -(-4)\cdot\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}$.

Αυτή είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(4\pi, 5\pi)$.

7. Στο κατακόρυφο επίπεδο του τροχού ορίζουμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα, του οποίου οι άξονες έχουν μονάδες με μήκος 1 m.



– Αν M είναι η θέση του βαγονιού A, t sec μετά την έναρξη της περιστροφής του τροχού και y_M η τεταγμένη του, τότε προφανώς το ζητούμενο ύψος ισούται με:

$$h = 10 + y_M, \quad (1).$$

Επειδή ο περιστρεφόμενος τροχός εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 sec, η ακτίνα OA σε 8 sec διαγράφει γωνία 2π rad.

Επομένως, σε 1 sec διαγράφει γωνία $\frac{2\pi}{8}$ rad $= \frac{\pi}{4}$ rad, οπότε σε t sec θα διαγράψει γωνία $\frac{\pi t}{4}$ rad.

Επειδή $\rho = (OM) = 4$ m, σύμφωνα με τον τύπο $y_M = \rho \cdot \eta\mu\omega$, θα ισχύει $y_M = 4\cdot\eta\mu\frac{\pi t}{4}$, οπότε, λόγω της (1), έχουμε $h = 10 + 4\cdot\eta\mu\frac{\pi t}{4}$.

Επομένως, σε χρόνο:

- 1 sec από την έναρξη περιστροφής το ύψος του βαγονιού Α θα είναι:

$$h=\left(10+4\cdot ημ\frac{1π}{4}\right)\ m=\left(10+2\sqrt{2}\right)\ m.$$

- 2 sec από την έναρξη περιστροφής το ύψος του βαγονιού Α θα είναι:

$$h=\left(10+4\cdot ημ\frac{2π}{4}\right)\ m=\left(10+4\right)\ m=14\ m.$$

- 5 sec από την έναρξη περιστροφής το ύψος του βαγονιού Α θα είναι:

$$h=\left(10+4\cdot ημ\frac{5π}{4}\right)\ m=\left(10+4\cdot ημ\left(π+\frac{π}{4}\right)\right)\ m=\left(10-4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ m=\left(10-2\sqrt{2}\right)\ m.$$

– Για να φτάσει το βαγόνι Α στη θέση Β χρειάζεται 1 sec. Επομένως το ύψος του βαγονιού Β τη χρονική στιγμή t ισούται με το ύψος του Α τη χρονική στιγμή t + 1, δηλαδή με:

$$10+4\cdot ημ\frac{π(t+1)}{4}=10+4\cdot ημ\left(\frac{πt}{4}+\frac{π}{4}\right).$$

8. i. $$σφx-εφx=\frac{συνx}{ημx}-\frac{ημx}{συνx}=\frac{συν^2x-ημ^2x}{ημx\cdot συνx}=\frac{συν2x}{\frac{1}{2}ημ2x}=2σφ2x.$$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι $σφx-εφx-2εφ2x-4εφ4x-8σφ8x=0$. Λόγω της **i.**, έχουμε:

$$\underbrace{σφx-εφx}_{\text{i. ερώτ.}}-2εφ2x-4εφ4x-8σφ8x=2σφ2x-2εφ2x-4εφ4x-8σφ8x$$
$$=4σφ4x-4εφ4x-8σφ8x$$
$$=8σφ8x-8σφ8x=0.$$

9. i. Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $3x-4x^3=\frac{\sqrt{2}}{2}$, (1). Επειδή $3ημα-4ημ^3α=ημ3α$, για να είναι το ημα λύση της εξίσωσης (1) αρκεί $ημ3α=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Έχουμε όμως $ημ3α=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow ημ3α=ημ\frac{π}{4}\Leftrightarrow 3α=2κπ+\frac{π}{4}$ ή $3α=2κπ+\frac{3π}{4},\ κ\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow α=\frac{2κπ}{3}+\frac{π}{12}\ \text{ ή }\ α=\frac{2κπ}{3}+\frac{π}{4},\ κ\in\mathbb{Z}.$$

Θεωρούμε τη διαίρεση κ : 3. Τότε ο κ παίρνει τη μορφή $κ=3ρ+υ$, όπου $ρ,υ\in\mathbb{Z}$, με $0\le υ\le 3$, οι ρίζες της $ημ3α=\frac{\sqrt{2}}{2}$ δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} \alpha = 2\rho\pi + \dfrac{2\upsilon\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} = 2\rho\pi + \dfrac{(8\upsilon+1)\pi}{12} \\ \alpha = 2\rho\pi + \dfrac{2\upsilon\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = 2\rho\pi + \dfrac{(8\upsilon+3)\pi}{12} \end{cases}, \text{ με } \rho, \upsilon \in \mathbb{Z} \text{ και } 0 \le \upsilon \le 3.$$

Επομένως, οι αριθμοί:

- $$\eta\mu\left(2\rho\pi + \frac{(8\upsilon+1)\pi}{12}\right) = \eta\mu\frac{(8\upsilon+1)\pi}{12} = \begin{cases} \eta\mu\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \eta\mu\dfrac{9\pi}{12} = \eta\mu\dfrac{3\pi}{4} = \eta\mu\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\dfrac{17\pi}{12} = -\eta\mu\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases},$$

- $$\eta\mu\left(2\rho\pi + \frac{(8\upsilon+3)\pi}{12}\right) = \eta\mu\frac{(8\upsilon+3)\pi}{12} = \begin{cases} \eta\mu\dfrac{3\pi}{12} = \eta\mu\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \eta\mu\dfrac{11\pi}{12} = \eta\mu\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \eta\mu\dfrac{19\pi}{12} = -\eta\mu\dfrac{5\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

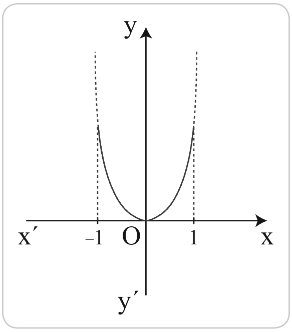
είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Επειδή η εξίσωση αυτή είναι τρίτου βαθμού θα είναι και οι μοναδικές.

ii. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο.

10. Έστω Μ(x, y) ένα σημείο του επιπέδου, με $x = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \sigma\upsilon\nu 2\theta + 1$, όπου $\theta \in [0, \pi]$.

Τότε $y = \sigma\upsilon\nu 2\theta + 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 + 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2x^2$.

Επειδή, επιπλέον, $-1 \le \sigma\upsilon\nu\theta \le 1$, θα είναι $-1 \le x \le 1$. Άρα, το Μ(x, y) ανήκει στο τόξο της παραβολής $y = 2x^2$, με $-1 \le x \le 1$.



Αντιστρόφως, έστω Μ(x, y) ένα σημείο του τόξου της παραβολής $y = 2x^2$, με $-1 \le x \le 1$.

Τότε υπάρχει $\theta \in [0, \pi]$ τέτοιο, ώστε $\sigma\upsilon\nu\theta = x$, οπότε $y = 2(\sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta$.

Άρα, το Μ(x, y) ανήκει στο σύνολο των σημείων του επιπέδου με:

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta \text{ και } y = \sigma\upsilon\nu 2\theta + 1, \text{ όπου } \theta \in [0, \pi].$$

11. Επειδή $-\pi < x < \pi$, θα είναι και $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$. Άρα, ορίζεται η $εφ\frac{x}{2}$ και σύμφωνα με τους δοσμένους τύπους έχουμε $ημx = \dfrac{2εφ\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}$ και $συνx = \dfrac{1-εφ^2\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}$.

$$\text{Τότε}\quad f(x) = \frac{1+\dfrac{2εφ\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}}{5+4\dfrac{1-εφ^2\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}} = \frac{\left(1+εφ\frac{x}{2}\right)2}{9+εφ^2\frac{x}{2}} = \frac{(1+t)^2}{9+t^2},\ \text{όπου}\ t = εφ\frac{x}{2}.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $0 \le \frac{(1+t)^2}{9+t^2} \le \frac{10}{9}$. Πράγματι, η πρώτη ανισότητα προφανώς ισχύει, ενώ η δεύτερη γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{(1+t)^2}{9+t^2} \le \frac{10}{9} \Leftrightarrow 9(1+t)^2 \le 90 + 10t^2 \Leftrightarrow 0 \le t^2 - 18t + 81 \Leftrightarrow (t-9)^2 \ge 0,\ \text{που ισχύει.}$$

12. $$ημx + συνx - \frac{ημ2x}{\sqrt{2}+1} = συν\frac{\pi}{4}\cdot συνx + ημ\frac{\pi}{4}ημx \overset{\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow ημx + συνx - \left(\sqrt{2}-1\right)ημ2x = \frac{\sqrt{2}}{2}συνx + \frac{\sqrt{2}}{2}ημx$$

$$\Leftrightarrow 2ημx + 2συνx - 2\left(\sqrt{2}-1\right)ημ2x = \sqrt{2}συνx + \sqrt{2}ημx$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot(ημx + συνx) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)ημ2x$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}\cdot ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)ημ2x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2}-1\right)ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)ημ2x$$

$$\Leftrightarrow ημ2x = ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2κ\pi + x + \frac{\pi}{4}\quad ή\quad 2x = 2κ\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4},\ κ\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2κ\pi + \frac{\pi}{4}\quad ή\quad x = \frac{2κ\pi}{3} + \frac{\pi}{4},\ κ\in\mathbb{Z}.$$

Όμως $ημx + συνx =$

$$= ημx + \frac{ημ\frac{\pi}{4}}{συν\frac{\pi}{4}}\cdot συνx$$

$$= \frac{ημx\cdot συν\frac{\pi}{4} + συνx\cdot ημ\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{2}ημ\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

13. **i.** Επειδή (ΒΓ) = (ΟΕ) = 20συνθ και (ΟΑ) = 20ημθ, το ζητούμενο εμβαδό S είναι ίσο με:

$$S = (ΒΓ)^2 + (ΟΑ)\cdot(ΟΕ) = 400συν^2θ + 400ημθ\cdot συνθ.$$

ii. Λόγω της **i.** έχουμε $S = 200\cdot(1 + συν2θ) + 200ημ2θ = 200\cdot(ημ2θ + συν2θ) + 200$

$$= 200\cdot\sqrt{2}ημ\left(2θ+\frac{π}{4}\right)+200.$$

Επομένως $S = 200\sqrt{2}ημ\left(2θ+\frac{π}{4}\right)+200.$

iii. Επομένως, το S παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν:

$$ημ\left(2θ+\frac{π}{4}\right)=1 \Leftrightarrow 2θ+\frac{π}{4}=\frac{π}{2} \Leftrightarrow 2θ=\frac{π}{4} \Leftrightarrow θ=\frac{π}{8}.$$

Η μεγαλύτερη τιμή του S είναι ίση με $S_{μεγ.} = 200\sqrt{2}+200 = 200\left(\sqrt{2}+1\right).$

14. Από τον νόμο των ημιτόνων για τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ έχουμε:

$$\frac{(ΒΜ)}{ημx}=\frac{(ΑΜ)}{ημ(ω-x)} \quad και \quad \frac{(ΓΜ)}{ημy}=\frac{(ΑΜ)}{ημ\left(π-(ω+y)\right)},$$

όπου $\hat{Β}=ω-x$ και $\hat{Γ}=π-(ω+y)$, (ΒΜ) = (ΓΜ), οπότε με διαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\frac{ημy}{ημx}=\frac{ημ(ω+y)}{ημ(ω-x)} \Leftrightarrow ημy\cdot(ημω\cdotσυνx-συνω\cdotημx)=ημx\cdot(ημω\cdotσυνy+συνω\cdotημy)$$

$$\Leftrightarrow συνx\cdotημy\cdotημω-ημx\cdotσυνy\cdotημω=2ημx\cdotημy\cdotσυνω$$

$$\Leftrightarrow \frac{συνx\cdotημy\cdotημω}{ημx\cdotημy\cdotημω}-\frac{ημx\cdotσυνy\cdotημω}{ημx\cdotημy\cdotημω}=\frac{2ημx\cdotημy\cdotσυνω}{ημx\cdotημy\cdotημω}$$

$$\Leftrightarrow σφx-σφy=2σφω.$$

15. Αν θέσουμε Γ = x, τότε Β = 180° – 45° – 30° – x = 105° – x, οπότε από τον νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΒΔ έχουμε:

- $\frac{(ΔΓ)}{ημ45^o}=\frac{(ΑΔ)}{ημx}$, οπότε $(ΔΓ)=\frac{(ΑΔ)\cdotημ45^o}{ημx}=\frac{(ΑΔ)\cdot\sqrt{2}}{2ημx}.$

- $\frac{(ΔΒ)}{ημ30^o}=\frac{(ΑΔ)}{ημ\left(105^o-x\right)}$, οπότε $(ΔΒ)=\frac{(ΑΔ)\cdotημ30^o}{ημ\left(105^o-x\right)}=\frac{(ΑΔ)}{2ημ\left(105^o-x\right)}.$

Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και επειδή $\frac{(\Delta\Gamma)}{(\Delta B)}=\sqrt{3}$, τότε βρίσκουμε ότι:

$$\frac{(\Delta\Gamma)}{(\Delta B)}=\frac{\sqrt{2}\eta\mu\left(105^{o}-x\right)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}\eta\mu\left(105^{o}-x\right)}{\eta\mu x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\eta\mu x=\sqrt{2}\left(\eta\mu 105^{o}\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 105^{o}\eta\mu x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\eta\mu x=\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu 15^{o}\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu 15^{o}\eta\mu x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\eta\mu x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}\sigma\upsilon\nu x+\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\eta\mu x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\eta\mu x=\left(\sqrt{3}+1\right)\sigma\upsilon\nu x+\left(\sqrt{3}-1\right)\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}+1\right)\eta\mu x=\left(\sqrt{3}+1\right)\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x.$$

$\varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=45^{o}$ [αφού $0° < x < 180°$], επομένως $\Gamma = 45°$ και $B = 60°$.

4.1 Πολυώνυμα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Οι παραστάσεις $-x^3+1$ και $-x^3+3\alpha^2x-3\alpha x^2+\alpha^3$ είναι πολυώνυμα του x, ενώ οι παραστάσεις $x+\frac{1}{x}$ και $x^4-2x^{\frac{1}{3}}+4x-1$ δεν είναι πολυώνυμα του x.

2. **i.** Έχουμε $P(x)+Q(x)=x^2-5x+2+x^3+3x+1=x^3+x^2-2x+3$.

ii. Έχουμε $2P(x)-3Q(x)=2\left(x^2-5x+2\right)-3\left(x^3+3x+1\right)$

$$=2x^2-10x+4-3x^3-9x-3$$
$$=-3x^3+2x^2-19x+1.$$

iii. Έχουμε $P(x)\cdot Q(x)=\left(x^2-5x+2\right)\left(x^3+3x+1\right)$

$$=x^5-5x^4+2x^3+3x^3-15x^2+6x+x^2-5x+2$$
$$=x^5-5x^4+5x^3-14x^2+x+2.$$

iv. Έχουμε $\left|P(x)\right|^2=\left(x^2-5x+2\right)^2=x^4+25x^2+4-10x^3+4x^2-20x$

$$=x^4-10x^3+29x^2-20x+4.$$

3. Για να είναι το P(x) το μηδενικό πολυώνυμο, πρέπει να ισχύουν συγχρόνως:

- $4\mu^3-\mu=0 \Leftrightarrow \mu\cdot(4\mu^2-1)=0 \Leftrightarrow (\mu=0$ ή $\mu^2=\frac{1}{4}) \Leftrightarrow (\mu=0$ ή $\mu=\pm\frac{1}{2})$,
- $\mu^2-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow \mu^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \mu=\pm\frac{1}{2}$,
- $-2\mu+1=0 \Leftrightarrow \mu=\frac{1}{2}$.

Η κοινή ρίζα των εξισώσεων αυτών είναι $\mu=\frac{1}{2}$. Επομένως, το P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο, αν $\mu=\frac{1}{2}$.

4. Από τον ορισμό της ισότητας δύο πολυώνυμων, αρκεί:

$\alpha^2-3\alpha=-2$ και $1=\alpha^2$ και $\alpha^3-1=0$ και $\alpha=1$

ή $\alpha^2-3\alpha+2=0$ και $\alpha^2-1=0$ και $\alpha^3-1=0$ και $\alpha=1$.

Η κοινή ρίζα αυτών είναι $\alpha=1$, που είναι η ζητούμενη τιμή του α.

5. i. Έχουμε:

- $P(-1)=2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+7=-2-3-2+7=0$, οπότε το -1 είναι ρίζα του P(x).
- $P(1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1+7=8$, οπότε το 1 δεν είναι ρίζα του P(x).

ii. Ομοίως, έχουμε:

- $Q(-1)=-(-1)^4+1=-1+1=0$, οπότε το -1 είναι ρίζα του Q(x).
- $Q(1)=-1^4+1=-1+1=0$, οπότε το 1 είναι ρίζα του Q(x).
- $Q(3)=-3^4+1=-80\neq 0$, οπότε το 3 δεν είναι ρίζα του Q(x).

6. Για να είναι το 2 ρίζα του P(x) αρκεί:

$$P(2)=0\Leftrightarrow 2^3-\kappa\cdot 2^2+5\cdot 2+\kappa=0\Leftrightarrow -3\kappa+18=0\Leftrightarrow 3\kappa=18\Leftrightarrow \kappa=6.$$

7. Έχουμε:

$$P(-1)=1\Leftrightarrow 5\cdot(-1)^2+3\alpha\cdot(-1)+\alpha^2-2=1\Leftrightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0\Leftrightarrow \alpha=1 \quad ή \quad \alpha=2.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $f(x)=\alpha x\cdot(x+1)+\beta x+\gamma=\alpha x^2+(\alpha+\beta)\cdot x+\gamma$.
Για να παίρνει το $3x^2-7x+5$ τη μορφή $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\gamma$, αρκεί τα δύο αυτά πολυώνυμα να είναι ίσα. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\alpha=3,\quad \alpha+\beta=-7 \quad και \quad \gamma=5,$$

οπότε $\alpha=3$, $\beta=-10$ και $\gamma=5$.

2. Το -2 είναι ρίζα του P(x) αν και μόνο αν ισχύει:

$$P(-2)=0\Leftrightarrow 3(-2)^3+\alpha\cdot(-2)^2+\beta\cdot(-2)-6=0\Leftrightarrow -24+4\alpha-2\beta-6=0$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha-2\beta=30\Leftrightarrow 2\alpha-\beta=15,\quad (1).$$

Το 3 είναι ρίζα του P(x) μόνο αν και μόνο αν ισχύει:

$$P(3)=0\Leftrightarrow 3\cdot 3^3+\alpha\cdot 3^2+\beta\cdot 3-6=0\Leftrightarrow 81+9\alpha+3\beta-6=0$$
$$\Leftrightarrow 27+3\alpha+\beta-2=0\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-25,\quad (2).$$

Λύνοντας το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha=-2$, $\beta=-19$.

3. Το 1 είναι ρίζα του P(x) αν και μόνο αν ισχύει:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 2+\lambda+\mu+6=0 \Leftrightarrow \lambda+\mu=-8, \quad (1).$$

Ακόμη έχουμε:

$$P(-2)=-12 \Leftrightarrow 2\cdot(-2)^3+\lambda\cdot(-2)^2+\mu\cdot(-2)+6=-12 \Leftrightarrow -16+4\lambda-2\mu+6=-12$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda-2\mu=-2 \Leftrightarrow 2\lambda-\mu=-1, \quad (2).$$

Λύνοντας το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε $\lambda=-3$ και $\mu=-5$.

4. Το πολυώνυμο P(x) γράφεται:

$P(x)=\lambda(9\lambda^2-4)x^3+(9\lambda^2-4)x-(3\lambda-2)$

$\quad=\lambda(3\lambda-2)\cdot(3\lambda+2)x^3+(3\lambda-2)\cdot(3\lambda+2)x-(3\lambda-2).$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i. Αν $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq\frac{2}{3}$ και $\lambda\neq-\frac{2}{3}$, τότε ο βαθμός του πολυώνυμου P(x) είναι 3.

ii. Αν $\lambda=0$, τότε $P(x)=-4x+2$ και ο βαθμός του πολυώνυμου είναι 1.

iii. Αν $\lambda=\frac{2}{3}$, τότε $P(x)=0$, είναι δηλαδή το μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό.

iii. Αν $\lambda=-\frac{2}{3}$, τότε $P(x)=4$, είναι δηλαδή ένα σταθερό πολυώνυμο και επομένως έχει βαθμό μηδέν.

5. Είναι φανερό ότι ο βαθμός του P(x) είναι 2.

Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε έχουμε:

$$(2x+1)\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=2x^3-9x^2-3x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha x^3+2\beta x^2+2\gamma x+\alpha x^2+\beta x+\gamma=2x^3-9x^2-3x+1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha x^3+(2\beta+\alpha)x^2+(2\gamma+\beta)x+\gamma=2x^3-9x^2-3x+1$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha=2,\quad 2\beta+\alpha=-9,\quad 2\gamma+\beta=-3 \quad \text{και} \quad \gamma=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha=1,\quad \beta=-5,\quad \gamma=1.$$

Είναι επομένως $P(x)=x^2-5x+1$.

4.2 Διαίρεση πολυωνύμων

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+6x^2-17x+20 & x+3 \\ \cline{2-2}
-3x^3-9x^2 & 3x^2-3x-8 \\ \cline{1-1}
-3x^2-17x+20 & \\
+3x^2+9x & \\ \cline{1-1}
-8x+20 & \\
8x+24 & \\ \cline{1-1}
44 &
\end{array}
$$

Επομένως $3x^3+6x^2-17x+20=(x+3)\left(3x^2-3x-8\right)+44$.

ii.

$$
\begin{array}{ll|l}
x^4 & -81 & x-3 \\ \cline{3-3}
-x^4+3x^3 & & x^3+3x^2+9x+27 \\ \cline{1-2}
3x^3 & -81 & \\
-3x^3+9x^2 & & \\ \cline{1-2}
9x^2 & -81 & \\
-9x^2+27x & & \\ \cline{1-2}
27x & -81 & \\
-27x & +81 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Επομένως $x^4-81=(x-3)\left(x^3+3x^2+9x+27\right)$.

iii.

$$
\begin{array}{lll|l}
24x^5 & +20x^3-16x^2 & -15 & 6x^2+5 \\ \cline{4-4}
-24x^5 & -20x^3 & & 4x^3-\dfrac{8}{3} \\ \cline{1-3}
 & -16x^2 & -15 & \\
 & 16x^2 & +5\cdot\dfrac{8}{3} & \\ \cline{1-3}
 & & -\dfrac{5}{3} &
\end{array}
$$

Επομένως $24x^5+20x^3-16x^2-15=\left(6x^2+5\right)\left(4x^3-\dfrac{8}{3}\right)-\dfrac{5}{3}$.

iv.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+4x^3-5x^2+3x-2 & x^2+2x-3 \\ \cline{2-2} -2x^4-4x^3+6x^2 \qquad\qquad & 2x^2+1 \\ \hline x^2+3x-2 & \\ -x^2-2x+3 & \\ \hline x+1 & \end{array}$$

Επομένως $2x^4+4x^3-5x^2+3x-2=\left(x^2+2x-3\right)\left(2x^2+1\right)+x+1$.

v. Είναι $\left(x-1\right)^3=x^3-3x^2+3x-1$, οπότε:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & x^3-3x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} -x^4+3x^3-3x^2+x & x+3 \\ \hline 3x^3-3x^2+x & \\ \qquad -3x^3+9x^2-9x+3 & \\ \hline \qquad\qquad 6x^2-8x+3 & \end{array}$$

Επομένως $x^4=\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\left(x+3\right)+6x^2-8x+3=\left(x-1\right)^3\left(x+3\right)+6x^2-8x+3$.

vi.

$$\begin{array}{ll|l} x^5 & +7 & x^3-1 \\ \cline{3-3} -x^5+x^2 & & x^2 \\ \hline \qquad x^2 & +7 & \end{array}$$

Επομένως $x^5+7=\left(x^3-1\right)x^2+x^2+7$.

2. Έστω $P\left(x\right)=18x^{80}-6x^{50}+4x^{20}-2$. Τότε, το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι:

$$\upsilon=P\left(-1\right)=18-6+4-2=14.$$

3. Το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x)$ αν και μόνο αν το 1 είναι ρίζα του $g(x)$, δηλαδή μόνο αν:

$$g\left(1\right)=0 \Leftrightarrow \kappa^2+3\kappa-4=0 \Leftrightarrow \kappa=1 \quad ή \quad \kappa=-4.$$

4. i. Με το σχήμα Horner έχουμε:

–1	0	75	–250	ρ = –10
	10	–100	250	
–1	10	–25	0	

Επομένως, το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = -x^2 + 10x - 25$ και υ = 0 αντίστοιχα.

ii. Ομοίως, έχουμε:

1	0	0	512	ρ = –8
	–8	64	–512	
1	–8	64	0	

Επομένως, το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^2 - 8x + 64$ και υ = 0 αντίστοιχα.

iii. Ομοίως, έχουμε:

1	0	0	0	0	1	ρ = 1
	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	2	

Επομένως, το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ και υ = 2 αντίστοιχα.

iv. Ομοίως, έχουμε:

–3	0	0	0	0	ρ = 2
	–6	–12	–24	–48	
–3	–6	–12	–24	–48	

Επομένως, το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = -3x^3 - 6x^2 - 12x - 24$ και υ = –48 αντίστοιχα.

v. Ομοίως, έχουμε:

4	16	–23	–15	$\rho = -\frac{1}{2}$
	–2	–7	15	
4	14	–30	0	

Επομένως, το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = 4x^2 + 14x - 30$ και υ = 0 αντίστοιχα.

5. Το σχήμα του Horner για το P(x) και για ρ = –11 δίνει:

–2	–2	–1	2409	ρ = –11
	22	–220	2431	
–2	20	–221	4840	

Επομένως $P(-11) = 4840$.

6. i. Για ρ = –3 έχουμε:

1	0	–25	0	144	ρ = –3
	–3	9	48		
1	–3	–16	48	0	

Δηλαδή $P(-3) = 0$. Επομένως, το x + 3 είναι παράγοντας του P(x).

ii. Για $\rho = \frac{1}{4}$ έχουμε:

16	–8	9	14	–4	$\rho = \frac{1}{4}$
	4	–1	2	4	
16	–4	8	16	0	

Δηλαδή $P\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, επομένως, το $x - \frac{1}{4}$ είναι παράγοντας του P(x).

iii. Για $\rho = 1+\sqrt{3}$ έχουμε:

1	-3	0	2	$\rho = 1+\sqrt{3}$
	$1+\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	-2	
1	$-2+\sqrt{3}$	$1-\sqrt{3}$	0	

Δηλαδή $P\left(1+\sqrt{3}\right)=0$, επομένως, το $x-1-\sqrt{3}$ είναι παράγοντας του P(x).

7. Θεωρούμε τα $x^\nu - y^\nu$ και $x + y$ ως πολυώνυμα του x. Αν $P(x) = x^\nu - y^\nu$, τότε για $\rho = -y$ παίρνουμε:

$$P(\rho) = P(-y) = (-y)^\nu - y^\nu = y^\nu - y^\nu = 0, \text{ αφού } \nu \text{ άρτιος.}$$

Επομένως, το $x - \rho = x + y$ είναι παράγοντας του $P(x) = x^\nu - y^\nu$.

8. i. Έχουμε $P(\rho) = 4\rho^4 + 7\rho^2 + 12 > 0$, για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$. Επομένως $P(\rho) \neq 0$, για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το P(x) δεν έχει πραγματική ρίζα ή αλλιώς το P(x) δεν έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$.

ii. Για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$, έχουμε $Q(\rho) = -5\rho^6 - 3\rho^2 - 4 < 0$. Επομένως $Q(\rho) \neq 0$, για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι το Q(x) δεν έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$.

9. Έστω $P(x) = x^\nu + 1$, τότε $P(-1) = (-1)^\nu + 1 = -1 + 1 = 0$, αφού ο ν είναι περιττός φυσικός. Αυτό σημαίνει, ότι όταν το ν είναι περιττός, τότε το $x + 1$ είναι παράγοντας του $x^\nu + 1$.
Το σχήμα Horner, με διαιρετέο το $x^\nu + 1$ και διαιρέτη το $x + 1$, δίνει:

1	0	0	0	...	0	1	$\rho = -1$
	-1	1	-1	...	1	-1	
1	-1	1	-1	...	1	0	

Επομένως, το πηλίκο της διαίρεσης $(x^\nu + 1) : (x + 1)$ είναι το:

$$\pi(x) = x^{\nu-1} - x^{\nu-2} + x^{\nu-3} - \ldots + 1,$$

ενώ το υπόλοιπο είναι $\upsilon = 0$.
Τέλος, η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται:

$$x^\nu + 1 = (x + 1) \cdot (x^{\nu-1} - x^{\nu-2} + x^{\nu-3} - \ldots + 1).$$

10. i. Θεωρούμε διαιρετέο και διαιρέτη ως πολυώνυμα του x και κάνουμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 2\alpha x - 8\alpha^2 & x - 2\alpha \\ \cline{2-2} -3x^2 + 6\alpha x & 3x + 4\alpha \\ \hline 4\alpha x - 8\alpha^2 & \\ -4\alpha x + 8\alpha^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ii. Θεωρούμε διαιρετέο και διαιρέτη ως πολυώνυμα του x και κάνουμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + \alpha x^2 - \alpha^2 x - \alpha^3 & x + \alpha \\ \cline{2-2} -x^3 - \alpha x^2 & x^2 - \alpha^2 \\ \hline -\alpha^2 x - \alpha^3 & \\ \alpha^2 x + \alpha^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν το ν είναι παράγοντας του μ, δηλαδή $\mu = \rho\nu$, $\rho \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x^\mu - \alpha^\mu &= x^{\rho\nu} - \alpha^{\rho\nu} = (x^\nu)^\rho - (\alpha^\nu)^\rho \\ &= (x^\nu - \alpha^\nu) \cdot [(x^\nu)^{\rho-1} + (x^\nu)^{\rho-2} \cdot \alpha^\nu + \ldots + (\alpha^\nu)^{\rho-1}] \\ &= (x^\nu - \alpha^\nu) \cdot (x^{\nu(\rho-1)} + x^{\nu(\rho-2)} \cdot \alpha^\nu + \ldots + \alpha^{\nu(\rho-1)}). \end{aligned}$$

Επομένως, το $x^\mu - \alpha^\mu$ διαιρείται με το $x^\nu - \alpha^\nu$, δηλαδή το $x^\nu - \alpha^\nu$ είναι παράγοντας του $x^\mu - \alpha^\mu$.

2. i. Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (\alpha x + \beta)$.

Τότε έχουμε $P(x) = (\alpha x + \beta) \cdot \pi(x) + \upsilon(x)$.

Επειδή ο διαιρέτης $\alpha x + \beta$ είναι 1ου βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο. Έστω $\upsilon(x) = \upsilon$. Τότε έχουμε $P(x) = (\alpha x + \beta) \cdot \pi(x) + \upsilon$.

Για $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ παίρνουμε:

$$P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(-\alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} + \beta\right) \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \upsilon \Leftrightarrow \upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

ii. Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta$ διαιρείται με το $\alpha x + \beta$ αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} \upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 &\Leftrightarrow \alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + \beta = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta^3}{\alpha^2} + \beta = 0 \Leftrightarrow -\beta^3 + \alpha^2\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta(\alpha^2 - \beta^2) = 0 \Leftrightarrow (\beta = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2) \\ &\Leftrightarrow (\beta = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta \quad \text{ή} \quad \alpha = -\beta). \end{aligned}$$

3. Για το P(x) και για ρ = 1, έχουμε:

2	–6	5	–3	2	ρ = 1
	2	–4	1	–2	
2	–4	1	–2	0	

Οπότε $p(x)=(x-1)(2x^3-4x^2+x-2)$.

Για το $\pi(x)=2x^3-4x^2+x-2$ και για ρ = 2, έχουμε:

2	–4	1	–2	ρ = 2
	4	0	2	
2	0	1	0	

Οπότε $\pi(x)=(x-2)(2x^2+1)$. Έτσι, έχουμε $P(x)=(x-1)(x-2)(2x^2+1)$.

Αυτό σημαίνει ότι το P(x) διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και το πηλίκο της διαίρεσης είναι το $2x^2+1$.

4. Έχουμε $2x^3+3x^2+x=x(2x^2+3x+1)=2x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Για το πολυώνυμο P(x) έχουμε:

- $P(0)=(0+1)^{2\nu}-0^{2\nu}-2\cdot 0-1=1-1=0$, οπότε το x – 0 = x είναι παράγοντας του P(x).
- $P(-1)=(-1+1)^{2\nu}-(-1)^{2\nu}-2\cdot(-1)-1=-1+2-1=0$, οπότε το x + 1 είναι παράγοντας του P(x).
- $P\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2\nu}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2\nu}-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}+1-1=0$,

οπότε το $x+\frac{1}{2}$ είναι παράγοντας του P(x).

5. Για να είναι το $(x-1)^2$ παράγοντας του P(x), αρκεί το (x – 1) να είναι παράγοντας του P(x) και του πηλίκου π(x) της διαίρεσης $P(x):(x-1)$, δηλαδή αρκεί P(1) = 0 και π(1) = 0. Έχουμε, λοιπόν:

- $P(1)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0 \Leftrightarrow \beta=-1-\alpha$, (1).

Το P(x) τότε γράφεται:

$$\begin{aligned}P(x) &= \alpha x^{\nu+1} - (1+\alpha)x^{\nu} + 1 = \alpha x^{\nu+1} - \alpha x^{\nu} - x^{\nu} + 1\\ &= \alpha x^{\nu}(x-1) - (x^{\nu}-1)\\ &= \alpha x^{\nu}(x-1) - (x-1)\cdot(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \dots + x + 1)\\ &= (x-1)\cdot(\alpha x^{\nu} - x^{\nu-1} - x^{\nu-2} - \dots - x - 1).\end{aligned}$$

Έτσι, είναι $\pi(x) = \alpha x^{\nu} - x^{\nu-1} - \dots - x - 1$ και επομένως:

- $\pi(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 - 1 - \dots - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \nu = 0 \Leftrightarrow \alpha = \nu$.
  Τότε, λόγω της σχέσης (1), είναι $\beta = -1 - \nu$.

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Καθεμία από τις εξισώσεις γράφεται διαδοχικά:

i. $5x^4 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(5x^2 - 6\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (διπλή) ή $x = \sqrt{\frac{6}{5}}$ ή $x = -\sqrt{\frac{6}{5}}$.

ii. $$\begin{aligned}x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 &\Leftrightarrow x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)\left(x^2-9\right) = 0\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-3)(x+3) = 0\\ &\Leftrightarrow x = -2 \;\text{ ή }\; x = 3 \;\text{ ή }\; x = -3.\end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned}3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2 &\Leftrightarrow 3x^5 + 5x^4 - 3x^3 - 5x^2 = 0\\ &\Leftrightarrow 3x^3\left(x^2-1\right) + 5x^2\left(x^2-1\right) = 0\\ &\Leftrightarrow x^2\left(x^2-1\right)(3x+5) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 0 \;\text{(διπλή) ή }\; x = 1 \;\text{ ή }\; x = -1 \;\text{ ή }\; x = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

iv. $$\begin{aligned}x^6 - 64 = 0 &\Leftrightarrow x^6 - 2^6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - 2^3\right)\left(x^3 + 2^3\right) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+2x+4\right)(x+2)\left(x^2-2x+4\right) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2 \;\text{ ή }\; x = -2,\end{aligned}$$

αφού τα τριώνυμα $x^2 + 2x + 4$ και $x^2 - 2x + 4$ δεν έχουν ρίζες (διότι $\Delta < 0$).

v. $$\begin{aligned}x^3 + x^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 1 - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right) + (x-1)(x+1) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2x+2\right) = 0\\ &\Leftrightarrow x = 1,\end{aligned}$$

αφού το τριώνυμο $x^2 + 2x + 2$ δεν έχει ρίζες.

vi. $x^3-7x+6=0 \Leftrightarrow x^3-x-6x+6=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)-6(x-1)=0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x-6\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=2 \quad ή \quad x=-3.$$

vii. $(x+1)^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^3=-1 \Leftrightarrow x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2.$

viii. $7(3x+2)^2(1-x)^2-(3x+2)(1-x)^3=0 \Leftrightarrow (3x+2)(1-x)^2\left[7(3x+2)-(1-x)\right]=0$

$$\Leftrightarrow (3x+2)(x-1)^2(22x+13)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3} \quad ή \quad x=1 \text{ (διπλή)} \quad ή \quad x=-\frac{13}{22}.$$

ix. $x^3+8=7\left(x^2+5x+6\right)+9x^2-36 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2-2x+4\right)=7(x+2)(x+3)+9(x-2)(x+2)$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\left[x^2-2x+4-7x-21-9x+18\right]=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\left(x^2-18x+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \quad ή \quad x=9+4\sqrt{5} \quad ή \quad x=9-4\sqrt{5}.$$

x. $x^4-3x^3+6x-4=0 \Leftrightarrow x^4-2^2-3x\left(x^2-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)-3x\left(x^2-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)\left(x^2-3x+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-1)(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=\sqrt{2} \quad ή \quad x=-\sqrt{2} \quad ή \quad x=1 \quad ή \quad x=2.$$

2. i. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες ±1, ±2 του σταθερού όρου 2. Με το σχήμα Horner, για $\rho=1$ και $\rho=-1$, βρίσκουμε $P(1)=1\neq0$ και $P(-1)=-3\neq0$, οπότε οι 1 και –1 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης, ενώ για $\rho=2$ έχουμε:

1	–3	1	2	ρ = 2
	2	–2	–2	
1	–1	–1	0	

Είναι δηλαδή $P(2)=0$, οπότε το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Τέλος, για $\rho = -2$ βρίσκουμε $P(-2) = 20 \neq 0$, οπότε το –2 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

Επομένως, η μόνη ακέραια ρίζα της εξίσωσης είναι το 2.

ii. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι ±1, ±2, ±4.

Με το σχήμα Horner, για $\rho = 1$, έχουμε:

3	8	–15	4	$\rho = 1$
	3	11	–4	
3	11	–4	0	

Δηλαδή, το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως, η εξίσωση γράφεται:

$$(x-1)(3x^2+11x-4)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \quad ή \quad 3x^2+11x-4=0)$$

$$\Leftrightarrow (x=1 \quad ή \quad x=-4 \quad ή \quad x=\frac{1}{3}).$$

Επομένως, οι ακέραιες ρίζες είναι οι 1 και –4.

iii. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.

Με το σχήμα του Horner βρίσκουμε ότι οι ±1, 2 δεν είναι ρίζες, ενώ για $\rho = -2$ το σχήμα του Horner δίνει:

1	0	–10	–12	$\rho = -2$
	–2	4	12	
1	–2	–6	0	

Δηλαδή, το –2 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως, η εξίσωση γράφεται:

$$(x+2)(x^2-2x-6)=0 \Leftrightarrow (x+2=0 \quad ή \quad x^2-2x-6=0)$$

$$\Leftrightarrow (x=-2 \quad ή \quad x=1-\sqrt{7} \quad ή \quad x=1+\sqrt{7}).$$

Επομένως, η μόνη ακέραια ρίζα είναι το –2.

iv. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ±1, ±2, ±3, ±6. Επειδή, όμως, οι συντελεστές της εξίσωσης είναι όλοι θετικοί, οι θετικές ρίζες αποκλείονται. Για τον λόγο αυτόν, δοκιμάζουμε μόνο για αρνητικές ρίζες. Το σχήμα Horner, για $\rho = -1$, δίνει:

1	2	7	6	$\rho = -1$
	–1	–1	–6	
1	1	6	0	

Δηλαδή, το –1 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως, η εξίσωση γράφεται:

$(x+1)(x^2+x+6)=0 \Leftrightarrow x+1=0,$ (αφού το x^2+x+6 έχει $\Delta=-23<0$)

$\Leftrightarrow x=-1.$

Επομένως, η μόνη ακέραια ρίζα της εξίσωσης είναι το –1.

3. **i.** Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm1,\ \pm2$. Αν θέσουμε $P(x)=x^4+3x-2,$ θα είναι:

$$P(1)=2\neq0,\quad P(-1)=-4\neq0,\quad P(2)=20\neq0 \ \text{ και } \ P(-2)=8\neq0.$$

Επομένως, η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ii. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm1,\ \pm5$. Αν θέσουμε $P(x)=2x^4-3x^3+6x^2-24x+5$ και υπολογίσουμε τα $P(1),\ P(-1),\ P(5),\ P(-5),$ τότε βρίσκουμε ότι κανένα από αυτά δεν είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

4. **i.** Έχουμε:

- $2-3x\geq0 \Leftrightarrow 2\geq3x \Leftrightarrow 3x\leq2 \Leftrightarrow x\leq\dfrac{2}{3}.$
- $x^2-x-2\geq0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)\geq0 \Leftrightarrow x\leq-1$ ή $x\geq2.$
- $x^2-x+1>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (αφού $\Delta=1-4=-3<0$ και $\alpha=1>0$).

x	$-\infty$	-1		$\frac{2}{3}$		2	$+\infty$
2 – 3x	+		+	0	–		–
x^2-x-2	+	0	–		–	0	+
x^2-x+1	+		+		+		+
P(x)	+	0	–	0	+	0	–

ii.
- $-x^2+4\geq0 \Leftrightarrow x^2-4\leq0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2)\leq0 \Leftrightarrow -2\leq x\leq2.$
- $x^2-3x+2\geq0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq0 \Leftrightarrow x\leq1$ ή $x\geq2.$
- $x^2+x+1>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ (αφού $\Delta=-3<0$ και $\alpha=1>0$).

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$-x^2+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

5. i. Η ανίσωση γράφεται $2x^5-162x\le 0 \Leftrightarrow 2x\left(x^4-81\right)\le 0 \Leftrightarrow 2x\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)\le 0.$

Παρακάτω απεικονίζεται ο πίνακας προσήμου από τον οποίο προκύπτει ότι $x\in(-\infty,\,-3]\cup[0,\,3]$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^2+9		$+$		$+$		$+$		$+$	
Γινόμενο		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ii. Η ανίσωση γράφεται:

$$\left[x^2(x-1)+2(x-1)\right]\left(x^2-9\right) \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+2\right)\left(x^2-9\right)>0.$$

- $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$,
- $x^2+2\ge 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$,
- $x^2-9\ge 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)\ge 0 \Leftrightarrow x\le -3 \quad \text{ή} \quad x\ge 3.$

x	$-\infty$	-3		1		3	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2+2	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $(x-1)(x^2+2)(x^2-9)>0 \Leftrightarrow x\in(-3,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$.

iii. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)=2x^3-5x^2-6x+9$ είναι οι $\pm1,\ \pm3,\ \pm9$.

Διαπιστώνουμε ότι το 1 είναι ρίζα, οπότε:

2	–5	–6	9	ρ = 1
	2	–3	–9	
2	–3	–9	0	

Άρα, ισχύει ότι $2x^3-5x^2-6x+9=(x-1)(2x^2-3x-9)$ και η ανίσωση γίνεται:

$$(x-1)(2x^2-3x-9)>0.$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		1		3	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x^2-3x-9$	$+$		$-$		$-$		$+$
Γινόμενο	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

Άρα, λύσεις είναι τα $x\in\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)\cup(3,\ +\infty)$.

iv. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)=x^3-4x^2-3x+18$ είναι οι

$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6,\ \pm9,\ \pm18$.

Διαπιστώνουμε ότι το –2 είναι ρίζα, οπότε:

1	–4	–3	18	ρ = –2
	–2	12	–18	
1	–6	9	0	

Επομένως $x^3-4x^2-3x+18=(x+2)(x^2-6x+9)$, άρα η ανίσωση γίνεται:

$$(x+2)(x^2-6x+9)\le 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)^2\le 0.$$

Από τον ακόλουθο πίνακα προσήμου προκύπτουν οι λύσεις που είναι τα $x\in(-\infty,\ -2]\cup\{3\}$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
x + 2		–	0	+		+	
(x – 3)²		+		+	0	+	
Γινόμενο		–	0	+	0	+	

6. i. Έχουμε:

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+3x+6>0 &\Leftrightarrow x^2(x+2)+3(x+2)>0\\ &\Leftrightarrow (x+2)(x^2+3)>0\\ &\Leftrightarrow x+2>0,\ \text{αφού}\ x^2+3>0,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow x>-2. \end{aligned}$$

ii. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυώνυμου $P(x)=x^4-6x^3+22x^2-30x+13$ είναι $\pm 1,\ \pm 13$. Με το σχήμα Horner για ρ = 1 έχουμε:

1	–6	22	–30	13	ρ = 1
	1	–5	17	–13	
1	–5	17	–13	0	

οπότε $P(x)=(x-1)(x^3-5x^2+17x-13)$.

Ομοίως, για το πολυώνυμο $\pi(x)=x^3-5x^2+17x-13$ και για ρ = 1 έχουμε:

1	–5	17	–13	ρ = 1
	1	–4	13	
1	–4	13	0	

οπότε $\pi(x) = (x-1)(x^2-4x+13)$ και η ανίσωση γράφεται:

$$(x-1)^2(x^2-4x+13) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le 0, \text{ (αφού } x^2-4x+13>0)$$
$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα, η ανίσωση έχει μοναδική λύση την x = 1.

iii. Έχουμε:

$$x^3-3x+2<0 \Leftrightarrow x^3-x-2x+2<0 \Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x-1)<0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left|x(x+1)-2\right|<0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)<0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)<0$$
$$\Leftrightarrow x+2<0, \text{ (αφού } (x-1)^2>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, \text{ με } x\ne 1)$$
$$\Leftrightarrow x<-2.$$

iv. Αν εργαστούμε με το σχήμα του Horner για ρ = –1 βρίσκουμε:

1	–1	1	–3	–6	ρ = –1
	–1	2	–3	6	
1	–2	3	–6	0	

οπότε η ανίσωση γράφεται:

$$(x+1)(x^3-2x^2+3x-6)\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot\left[x^2(x-2)+3(x-2)\right]\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2+3)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)\ge 0 \quad \text{(αφού } x^2+3>0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow x\le -1 \quad \text{ή} \quad x\ge 2.$$

7. **i.** Τα σημεία τομής έχουν ως τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3-3x^2-5x-2=0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι $\pm 1,\ \pm 2$.

Με το σχήμα Horner βρίσκουμε ότι $f(1)\ne 0,\ f(-1)\ne 0$, ενώ για ρ = 2 έχουμε:

3	–3	–5	–2	ρ = 2
	6	6	2	
3	3	1	0	

οπότε $f(x)=(x-2)(3x^2+3x+1)$. Το τριώνυμο, όμως, $3x^2+3x+1$ δεν έχει ρίζες, οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο A(2, 0).

ii. Όπως και στην περίπτωση (i), αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-3x-1=0.$$

Αυτή διαδοχικά γράφεται:

$$\begin{aligned} 3x^3-3x+x^3-1=0 &\Leftrightarrow 3x(x^2-1)+(x-1)(x^2+x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)\cdot\left|3x^2+3x+x^2+x+1\right|=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(4x^2+4x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)^2=0 \\ &\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=-\frac{1}{2} \text{ (διπλή).} \end{aligned}$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της g τέμνει τον x′x στο σημείο (1, 0) και εφάπτεται αυτού στο σημείο $\left(-\frac{1}{2},\, 0\right)$.

8. Αρκεί να βρούμε τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x)<0 &\Leftrightarrow x^4-5x^3+3x^2+x<0 \Leftrightarrow x(x^3-5x^2+3x+1)<0 \\ &\Leftrightarrow x(x^3-x^2-3x^2+3x-x^2+1)<0 \\ &\Leftrightarrow x\left[x^2(x-1)-3x(x-1)-(x-1)(x+1)\right]<0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x^2-4x-1)<0. \end{aligned}$$

Παρακάτω έχουμε τον πίνακα προσήμου.

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		0		1		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
x	–		–	0	+		+		+
x – 1	–	0	–		–		+		+
x^2-4x+1	+		–		–		–		+
Γινόμενο	+	0	–	0	+	0	–		+

Επομένως, οι λύσεις είναι όλα τα x, με $2-\sqrt{5}<x<0$ ή $1<x<2+\sqrt{5}$.

9. i. Αν θέσουμε $x^4 = y$, η εξίσωση γίνεται $y^2-15y-16=0$ και έχει ρίζες $y_1 = 16$ και $y_2 = -1$.
Επομένως:

- για $y=16$ έχουμε $x^4=16 \Leftrightarrow x=\pm 2$,
- για $y=-1$ έχουμε $x^4=-1$, που είναι αδύνατη.

ii. Αν θέσουμε $(x-1)^3 = y$, τότε η εξίσωση γίνεται $y^2-9y+8=0$ και έχει ρίζες $y_1 = 1$ και $y_2 = 8$.
Επομένως:

- για $y=1$ έχουμε $(x-1)^3=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$,
- για $y=8$ έχουμε $(x-1)^3=8 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$.

iii. Αν για $x \neq -1$ θέσουμε $\frac{x}{x+1}=y$, η εξίσωση γίνεται $6y^2+5y-6=0$ και έχει ρίζες $y_1=-\frac{3}{2}$ και $y_2=\frac{2}{3}$. Επομένως, η αρχική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{x}{x+1}=-\frac{3}{2} \quad ή \quad \frac{x}{x+1}=\frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x=-3x-3 \quad ή \quad 3x=2x+2 \Leftrightarrow x=\frac{-3}{5} \quad ή \quad x=2.$$

10. Έστω $f(x)=x^3+5x-3$. Τότε $\begin{cases} f(0)=-3<0 \\ f(1)=3>0 \end{cases}$.

Άρα, η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Υπολογίζουμε τις τιμές $f(0{,}1)$, $f(0{,}2)$, ..., $f(0{,}9)$ και βρίσκουμε:

$$\begin{cases} f(0{,}5)=-0{,}375<0 \\ f(0{,}6)=0{,}216>0 \end{cases}.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μία ρίζα στο διάστημα (0,5, 0,6).

Ομοίως, τις τιμές $f(0{,}51)$, $f(0{,}52)$, ..., $f(0{,}59)$ και βρίσκουμε:

$$\begin{cases} f(0{,}56)\simeq -0{,}03<0 \\ f(0{,}57)\simeq 0{,}03>0 \end{cases}.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μια ρίζα στο διάστημα (0,56, 0,57).

Είναι, δηλαδή, $0{,}56 < \rho < 0{,}57$ και άρα $\rho \simeq 0{,}6$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Αν πολλαπλασιάσουμε με 10, τότε βρίσκουμε την ισοδύναμη εξίσωση που είναι η $x^3+5x^2+2x-8=0$, η οποία έχει ακέραιους συντελεστές. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8$. Με το σχήμα Horner έχουμε:

1	5	2	–8	ρ = 1
	1	6	8	
1	6	8	0	

οπότε η εξίσωση γράφεται $(x-1)(x^2+6x+8)=0$ και έχει ρίζες $x_1=1,\ x_2=-2,\ x_3=-4.$

ii. Αν πολλαπλασιάσουμε με το 6 βρίσκουμε την ισοδύναμη εξίσωση που είναι η:

$$6x^3-5x^2-44x+15=0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι $\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ \pm15$.

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε ότι το 3 είναι ρίζα της εξίσωσης. Συγκεκριμένα έχουμε:

6	–5	–44	15	ρ = 3
	18	39	–15	
6	13	–5	0	

οπότε η εξίσωση γράφεται $(x-3)(6x^2+13x-5)=0$ και έχει ρίζες:

$$x_1=3,\quad x_2=-2,5,\quad x_3=\frac{1}{3}.$$

2. Το P(x) έχει παράγοντα το x + 1, αν και μόνο αν:

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^4+\alpha(-1)^3+\beta(-1)^2-16(-1)-12=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\alpha+\beta+16-12=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=5,\quad (1).$$

Το P(x) έχει παράγοντα το x – 2, αν και μόνο αν:

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^4+\alpha\cdot2^3+\beta\cdot2^2-16\cdot2-12=0$$

$$\Leftrightarrow 16+8\alpha+4\beta-32-12=0$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha+4\beta-28=0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=7,\quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2), με πρόσθεση βρίσκουμε $3\alpha = 12 \Leftrightarrow \alpha = 4$, άρα:

$$\alpha - \beta = 5 \Leftrightarrow 4 - \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = -1.$$

οπότε $P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$.

Με το σχήμα Horner για $\rho = -1$ παίρνουμε:

1	4	–1	–16	–12	ρ = –1
	–1	–3	4	12	
1	3	–4	–12	0	

οπότε $P(x) = (x+1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 12)$, άρα:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 12) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\left[x^2(x+3) - 4(x+3)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = -3 \quad \text{ή} \quad x = \pm 2. \end{aligned}$$

3. Οι δυνατές ακέραιες ρίζες είναι ± 1, ± 3.

Για $x = 1$ έχουμε $1 - 1 + \kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -3$.

Για $x = -1$ έχουμε $-1 - 1 - \kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Για $x = 3$ έχουμε $27 - 9 + 3\kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -7$.

Για $x = -3$ έχουμε $-27 - 9 - 3\kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -11$.

Επομένως, οι τιμές του κ είναι -3, 1, -7, -11.

4. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι ± 1, ± 2.

Για $x = 1$ έχουμε $1 + 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, οπότε το 1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

Για $x = -1$ έχουμε $(-1)^{\nu} - 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{1}{2}, & \text{αν ν ¬ρτιος} \\ \lambda = -\dfrac{3}{2}, & \text{αν ν περιττÌς} \end{cases}$,

δηλαδή $\lambda \notin \mathbb{Z}$, οπότε το -1 δεν είναι ρίζα.

Ανάλογα αποδεικνύουμε ότι το -2 και 2 δεν είναι ρίζες.

Επομένως, η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες.

5. Το x – 1 είναι παράγοντας του P(x) αν και μόνο αν:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow 1-5-10+\kappa=0 \Leftrightarrow \kappa-14=0 \Leftrightarrow \kappa=14.$$

Για την τιμή αυτή του κ, είναι $P(x)=x^6-5x^4-10x^2+14$.

Αν θέσουμε $x^2=y$, τότε βρίσκουμε το πολυώνυμο $Q(y)=y^3-5y^2-10y+14$ για το οποίο από το σχήμα Horner, για ρ = 1, παίρνουμε:

1	–5	–10	14	ρ = 1
	1	–4	–14	
1	–4	–14	0	

οπότε $Q(y)=(y-1)(y^2-4y-14)$ και άρα:

$$P(x)=(x^2-1)(x^4-4x^2-14)=(x-1)(x+1)(x^4-4x^2-14).$$

Επομένως:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^4-4x^2-14)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=-1 \quad ή \quad x^4-4x^2-14=0.$$

Αν θέσουμε $x^2=\omega$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται $\omega^2-4\omega-14=0$ και έχει ρίζες:

$$\omega_1=2+3\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \omega_2=2-3\sqrt{2}.$$

Από αυτές, δεκτή είναι μόνο η θετική $2+3\sqrt{2}$, οπότε:

$$x^2=2+3\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{2+3\sqrt{2}} \quad ή \quad x=-\sqrt{2+3\sqrt{2}}.$$

Επομένως, οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι:

$$1,\ -1,\ -\sqrt{2+3\sqrt{2}},\ \sqrt{2+3\sqrt{2}}.$$

6. Ο όγκος του κουτιού θα είναι $V=(9-2x)(5-2x)x$, οπότε έχουμε την εξίσωση $(9-2x)(5-2x)x=21$, που γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$4x^3-28x^2+45x-21=0.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι $\pm1,\ \pm3,\ \pm7,\ \pm21$. Το σχήμα Horner για ρ = 1 δίνει:

4	–28	45	–21	ρ = 1
	4	–24	21	
4	–24	21	0	

οπότε η εξίσωση γράφεται $(x-1)(4x^2-24x+21)=0$ και έχει μοναδική ακέραια ρίζα το 1.

Επομένως $x = 1$ dm και οι διαστάσεις του κουτιού είναι 3, 7, 1.

7. Έχουμε:

$$\begin{aligned} 3t^4+2t^3-300t-200=0 &\Leftrightarrow t^3(3t+2)-100(3t+2)=0 \\ &\Leftrightarrow (3t+2)(t^3-100)=0 \\ &\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad t^3=100 \\ &\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad t=\sqrt[3]{100}. \end{aligned}$$

Η ρίζα $-\frac{2}{3}$ δεν είναι δεκτή αφού πρέπει $t \geq 0$. Επομένως $t=\sqrt[3]{100}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} &64=4^3<100<5^3=125 \\ &97,3\simeq(4,6)^3<100<(4,7)^3\simeq 103,8 \\ &99,8\simeq(4,64)^3<100<(4,65)^3\simeq 100,5. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $t=\sqrt[3]{100}\simeq 4,6$, οπότε η μέγιστη συγκέντρωση είναι:

$$C=\frac{3\cdot(4,6)^2+4,6}{100+50}=\frac{68,08}{150}\simeq 0,45.$$

8. Ο όγκος του διπλανού σχήματος είναι $V(x)=x^2(x+1)$ cm^3.

Επειδή ο όγκος αυτός είναι ίσος με 36 cm^3, έχουμε:

$$\begin{aligned} V(x)=36 &\Leftrightarrow x^2(x+1)=36 \Leftrightarrow x^3+x^2-36=0 \\ &\Leftrightarrow x^3-27+x^2-9=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9)+(x-3)(x+3)=0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x^2+4x+12)=0 \\ &\Leftrightarrow x-3=0, \text{ αφού το } x^2+4x+12 \text{ δεν έχει ρίζες} \\ &\Leftrightarrow x=3 \text{ m}. \end{aligned}$$

9. Το παγόβουνο λιώνει τελείως όταν γίνει V = 0. Για να βρούμε, επομένως, μετά από πόσο χρόνο θα λιώσει, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned}\frac{500\pi}{3}\left(2000-100\nu+20\nu^2-\nu^3\right)=0 &\Leftrightarrow \nu^3-20\nu^2+100\nu-2000=0\\ &\Leftrightarrow \nu^2\cdot(\nu-20)+100\cdot(\nu-20)=0\\ &\Leftrightarrow (\nu-20)\cdot(\nu^2+100)=0\\ &\Leftrightarrow \nu=20 \text{ ημέρες.}\end{aligned}$$

10. Η μπάρα θα επανέλθει στην αρχική της θέση όταν το d γίνει μηδέν.

Αρκεί, λοιπόν, να λύσουμε την εξίσωση:

$$15t\left(t^3-6t-9\right)=0 \Leftrightarrow t=0 \quad \text{ή} \quad t^3-6t-9=0.$$

Η ρίζα t = 0 αντιστοιχεί στη στιγμή της πρόσκρουσης, οπότε ο χρόνος που ζητάμε θα είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$\begin{aligned}t^3-6t-9=0 \quad &\Leftrightarrow t^3-9t+3t-9=0 \Leftrightarrow t^2\left(t^2-9\right)+3\left(t-3\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(t-3\right)\left(t^2+3t+3\right)=0\\ &\Leftrightarrow t=3 \text{ sec, αφού η } t^2+3t+3=0 \text{ δεν έχει ρίζες.}\end{aligned}$$

11. Πρέπει $y+4x\le 108$ και $x^2y=11664$, x, y > 0, οπότε:

$$y=\frac{11664}{x^2},\ (1) \quad \text{και} \quad \frac{11664}{x^2}+4x\le 108,\ (2).$$

Η ανίσωση (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}4x^3-108x^2+11664\le 0 &\Leftrightarrow x^3-27x^2+2916\le 0\\ &\Leftrightarrow x^3-18x^2-9x^2+18\cdot 162\le 0\\ &\Leftrightarrow x^2\left(x-18\right)-9\left(x^2-324\right)\le 0\\ &\Leftrightarrow x^2\left(x-18\right)-9\left(x-18\right)\left(x+18\right)\le 0\\ &\Leftrightarrow \left(x-18\right)\left(x^2-9x-162\right)\le 0\\ &\Leftrightarrow \left(x-18\right)^2\left(x+9\right)\le 0\end{aligned}$$

και επειδή x + 9 > 0, αφού x > 0, τότε $\left(x-18\right)^2\le 0 \Leftrightarrow x-18=0 \Leftrightarrow x=18.$

Άρα x = 18 cm, οπότε:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow y=\frac{11664}{18^2}=36 \text{ cm.}$$

12. i. Έστω $y = \lambda x + \beta$, η εξίσωση της ευθείας. Επειδή τα σημεία $A(1, 2)$ και $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ανήκουν στην ευθεία αυτήν, έχουμε:

$$2 = \lambda + \beta \quad \text{και} \quad -\frac{1}{2} = \lambda \cdot \frac{1}{2} + \beta \Leftrightarrow \beta + \lambda = 2 \quad \text{και} \quad 2\beta + \lambda = -1$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 5 \quad \text{και} \quad \beta = -3.$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 5x - 3$.

ii. Τα σημεία τομής των δύο γραμμών αποτελούν τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x^3 + x^2 \\ y = 5x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 = 5x - 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases}.$$

Επομένως, τα x των σημείων τομής επαληθεύουν την εξίσωση:

$$x^3 + x^2 = 5x - 3 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0.$$

iii. Με το σχήμα Horner έχουμε:

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (διπλή ρίζα)} \quad \text{ή} \quad x = -3.$$

Για $x = -3$, παίρνουμε $y = 5 \cdot (-3) - 3 = -18$.

Επομένως, οι συντεταγμένες του Γ είναι $(-3, -18)$.

13. α. Η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$x(x+1)(x+2) = 200 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 2x - 200 = 0 \quad (1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 200$.

Βρίσκουμε ότι $\begin{cases} f(4) = -80 < 0 \\ f(5) = 10 > 0 \end{cases}$. Άρα $4 < x < 5$.

Επίσης $\begin{cases} f(4,9) \simeq -0,52 < 0 \\ f(5) \simeq 10 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,9 < x < 5$,

και $\begin{cases} f(4,90) \simeq -0,52 < 0 \\ f(4,91) \simeq 0,52 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,90 < x < 4,91$.

Επομένως $x \simeq 4,9 \text{ cm} = 49 \text{ mm}$.

β. Η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$\pi r^2 (r+10) = 1000 \Leftrightarrow r^3 + 10r^2 = \frac{1000}{\pi} \simeq 318 \quad \left(1 \text{ lit} = 1000 \text{ cm}^3\right)$$
$$\Leftrightarrow r^3 + 10r^2 - 318 = 0.$$

Έστω $f(r) = r^3 + 10r^2 - 318$.

Τότε $\begin{cases} f(4) = -94 < 0 \\ f(5) = 57 > 0 \end{cases}$. Άρα $4 < r < 5$.

Επίσης $\begin{cases} f(4,6) \simeq -9,07 < 0 \\ f(4,7) \simeq 6,72 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,6 < r < 4,7$,

και $\begin{cases} f(4,65) \simeq -1,24 < 0 \\ f(4,66) \simeq 0,34 > 0 \end{cases}$. Άρα $4,65 < r < 4,66$.

Επομένως $r \simeq 4,7$ cm $= 47$ mm.

γ. Η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$\frac{1}{3}(h+5)^2 h = 250 \Leftrightarrow \left(h^2 + 10h + 25\right)h = 750 \quad \left(1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3\right)$$
$$\Leftrightarrow h^3 + 10h^2 + 25h - 750 = 0.$$

Έστω $f(h) = h^3 + 10h^2 + 25h - 750$.

Τότε $\begin{cases} f(6) = -24 < 0 \\ f(7) = 258 > 0 \end{cases}$. Άρα $6 < h < 7$.

Επίσης $\begin{cases} f(6,0) = -24 < 0 \\ f(6,1) = 1,58 > 0 \end{cases}$. Άρα $6,0 < h < 6,1$.

Τέλος $\begin{cases} f(6,09) = -101 < 0 \\ f(6,10) = 1,58 > 0 \end{cases}$. Άρα $6,09 < h < 6,10$.

Επομένως $h \simeq 6,1$ cm $= 61$ mm.

4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i.** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq 0$ και $x \neq 1$.

Για αυτές τις τιμές του x, η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} x\left(3x^2-1\right)-2=(x-1)\left(x^2-3x+2\right) &\Leftrightarrow 3x^3-x-2=x^3-3x^2+2x-x^2+3x-2 \\ &\Leftrightarrow 2x^3+4x^2-6x=0 \\ &\Leftrightarrow 2x\left(x^2+2x-3\right)=0 \text{ και επειδή } x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \\ &\Leftrightarrow x=-3 \quad \text{ή} \quad x=1 \\ &\Leftrightarrow x=-3, \quad (\text{αφού } x \neq 1). \end{aligned}$$

ii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

Για αυτές τις τιμές του x, η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} x^2(x+1)-2(x-1)=4 &\Leftrightarrow x^3+x^2-2x-2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x+1)-2(x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x=-\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x=\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Από αυτές, δεκτές είναι μόνο οι $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, αφού $x \neq -1$.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} 2ημ^3x+1-ημ^2x+2ημx-2=0 &\Leftrightarrow 2ημ^3x-ημ^2x+2ημx-1=0 \\ &\Leftrightarrow ημ^2x\cdot(2ημx-1)+2ημx-1=0 \\ &\Leftrightarrow (2ημx-1)\cdot(ημ^2x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow ημx=\frac{1}{2} \Leftrightarrow ημx=ημ\frac{π}{6}. \end{aligned}$$

Άρα $x=2κπ+\dfrac{π}{6}$ ή $x=2κπ+\dfrac{5π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

3. **i.** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Για αυτά τα x έχουμε:

$$\sqrt{x^3}=-4x \Leftrightarrow x=0,$$

διότι $\sqrt{x^3} \geq 0$ ενώ $-4x \leq 0$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται για $3x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{2}{3}$. Για αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{3x-2}=4 \Leftrightarrow 3x-2=16 \Leftrightarrow 3x=18 \Leftrightarrow x=6.$$

Κάνοντας επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι το 6 είναι και ρίζα της αρχικής.

iii. Η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\sqrt{5x-1}\geq 0$, για κάθε $x\geq \frac{1}{5}$, ενώ το –4 είναι αρνητικό.

iv. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $x+3\geq 0$, δηλαδή για κάθε $x\geq -3$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{x+3}=x+1 \Rightarrow x+3=x^2+2x+1 \quad \text{(Υψώσαμε στο τετράγωνο)}$$
$$\Rightarrow x^2+x-2 \Rightarrow x=-2 \quad \text{ή} \quad x=1.$$

Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι μόνο η $x=1$.

v. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $x+3\geq 0$ και $10-x\geq 0$, δηλαδή για κάθε $x\in[-3, 10]$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{10-x}+1 \Rightarrow x+3=10-x+1+2\sqrt{10-x}$$
$$\Rightarrow 2x-8=2\sqrt{10-x} \Rightarrow x-4=\sqrt{10-x}$$
$$\Rightarrow x^2-7x+6=0 \quad \text{(Υψώσαμε στο τετράγωνο)}$$
$$\Rightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=6.$$

Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι ρίζα της αρχικής εξίσωσης είναι μόνο η $x=6$.

vi. Η εξίσωση ορίζεται για $x\in\mathbb{R}$, με $x\geq 0$ και $x-20\geq 0$, δηλαδή για $x\geq 20$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά:

$$\left(\sqrt{x-20}\right)^2=\left(10-\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x-20=100-20\sqrt{x}+x$$
$$\Rightarrow 20\sqrt{x}=120 \Rightarrow \sqrt{x}=6 \Rightarrow x=36.$$

Η τιμή 36 ικανοποιεί τον περιορισμό $x\geq 20$ και αν θέσουμε στην αρχική $x=36$, τότε αυτή επαληθεύεται. Επομένως, το 36 είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

vii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in(0, +\infty)$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά:

$$2x=x-8+6\sqrt{x} \Rightarrow x+8=6\sqrt{x} \Rightarrow (x+8)^2=36x \Rightarrow x^2+16x+64=36x$$
$$\Rightarrow x^2-20x+64=0 \Rightarrow x=4 \quad \text{ή} \quad x=16.$$

Οι τιμές 4 και 16 ικανοποιούν τον περιορισμό $x > 0$ και επαληθεύουν την αρχική εξίσωση. Άρα, είναι ρίζες της.

viii. Η εξίσωση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, με $x \geq 0$ και $x \geq -1$, δηλαδή για $x \geq 0$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{1+2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1} \Rightarrow \quad \text{(υψώνουμε στο τετράγωνο)}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = x \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 4.$$

Οι τιμές 0 και 4 ικανοποιούν τον περιορισμό $x \geq 0$ και αν θέσουμε στην αρχική, τότε την επαληθεύουν. Είναι, επομένως, ρίζες της.

4. **i.** Για $x \neq -1$ έχουμε $\dfrac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 2.$

ii. Για $x \neq 3$ έχουμε $\dfrac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x < 3.$

iii. Για $x \neq -2$ και $x \neq 1$ έχουμε $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(x^2+x-2\right) \leq 0.$

Έστω $P(x) = \left(x^2-x-2\right)\left(x^2+x-2\right)$. Έχουμε:

- $x^2-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 2,$
- $x^2+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \quad \text{ή} \quad x \geq 1.$

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$\mathbf{x^2-x-2}$		+		+	0	−		−	0	+	
$\mathbf{x^2+x-2}$		+	0	−		−	0	+		+	
P(x)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1] \cup (1, 2].$

5. **i.** Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{2x+3}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-4x+4}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+7}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x-7)(x-1) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{7}{2}.$$

ii. Για $x \neq -\frac{5}{3}$ έχουμε:

$$\frac{x-2}{3x+5} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x-2}{3x+5} - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2-12x-20}{3x+5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-11x-22}{3x+5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x+22}{3x+5} \geq 0 \Leftrightarrow 11(x+2)(3x+5) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2 \quad \text{ή} \quad x > -\frac{5}{3}.$$

Άρα $x \in (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

iii. Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10+2x-2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-12}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-12\right)(x-1) \leq 0.$$

Έστω $P(x) = \left(x^2-x-12\right)(x-1)$. Έχουμε:

- $x^2-x-12 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ή} \quad x \geq 4$,
- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
x^2-x-12		+	0	−		−	0	+	
$x-1$		−		−	0	+		+	
P(x)		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup (1, 4]$.

iv. Για $x \neq \frac{5}{3}$ και $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{x}{3x-5} \leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x}{3x-5} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)(x-1)\left(x^2-7x+10\right) \leq 0.$$

Έστω $P(x)=(3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)$. Έχουμε:

- $3x-5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{5}{3}$,
- $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$,
- $x^2-7x+10\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2 \quad ή \quad x\geq 5$.

x	$-\infty$	1		$\frac{5}{3}$		2		3	$+\infty$
$3x-5$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x^2-7x+10$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
P(x)	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $\frac{x}{3x-5}\leq \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)\leq 0$,

$x\neq 1,\ x\neq \frac{5}{3} \Leftrightarrow x\in \left(1,\frac{5}{3}\right)\cup[2,5]$.

v. Για $x\neq \frac{1}{2}$ και $x\neq -2$ έχουμε:

$$\frac{x}{2x-1}\geq \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x}{2x-1}-\frac{3}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)\geq 0.$$

Έστω $P(x)=(x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)$. Έχουμε:

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$		1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	$+$		$+$	0	$+$		$-$		$+$
$2x-1$	$-$	0	$-$		$+$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$	0	$+$	0	$+$
P(x)	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup [3, +\infty)$.

6. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq 0$ και $x \neq \frac{1}{2}$.

Για αυτές τις τιμές του x έχουμε:

$$x^2 + \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x(2x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(2x-1)x + 2x - 1}{x(2x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3+1)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x(x^3+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)(x^2 - x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \quad \text{ή} \quad (x > 0, \text{ με } x \neq \frac{1}{2}).$$

Δηλαδή $x \in (-\infty, -1] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Η ανίσωση ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$, με $2x + 3 \geq 0$ και $1 - 3x \geq 0$, δηλαδή για $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 < \left(\sqrt{1-3x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 < 1 - 3x \Leftrightarrow 5x < -2 \Leftrightarrow x < \frac{-2}{5}$$

και λόγω του περιορισμού βρίσκουμε ως λύσεις της ανίσωσης τα $x \in \mathbb{R}$, με $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{-2}{5}$.

ii. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $x \geq 3$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$, τότε η ανίσωση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $3 \leq x < 5$ (γιατί το 1ο μέλος της είναι θετικό),
- αν $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$, τότε διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{x-3} > x - 5 \quad \Leftrightarrow x - 3 \geq (x-5)^2 \Leftrightarrow x - 3 > x^2 - 10x + 25$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 < 0 \Leftrightarrow 4 < x < 7$$

$$\Leftrightarrow 5 \leq x < 7, \quad \text{επειδή } x \geq 5.$$

Άρα, η ανίσωση επαληθεύεται για $x \in [3, 7)$.

2. i. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αν θέσουμε $\sqrt{x} = y$, τότε η εξίσωση γίνεται $y^2 + 3y - 10 = 0$ και έχει ρίζες $y_1 = 2$ και $y_2 = -5$.

Επειδή $y - \sqrt{x} \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 2$, οπότε $\sqrt{x} = 2$, δηλαδή $x = 4$.

Η τιμή 4 ικανοποιεί τον περιορισμό $x \geq 0$ και επαληθεύει την αρχική εξίσωση, άρα είναι ρίζα της.

ii. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Αν θέσουμε $\sqrt[3]{x} = y$, τότε η εξίσωση γίνεται $y^2 + y - 6 = 0$ και έχει ρίζες $y_1 = 2$ και $y_2 = -3$.

Επειδή $y = \sqrt[3]{x} \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y = 2$, οπότε $\sqrt[3]{x} = 2$, δηλαδή $x = 8$.

Η τιμή $x = 8$ ικανοποιεί τον περιορισμό $x \geq 0$ και επαληθεύει την αρχική εξίσωση, άρα είναι ρίζα της.

3. i. Αν θέσουμε $x^2 + x - 2 = y$, (1), τότε η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 + x - 2 - 2 = \sqrt{x^2 + x - 2} \Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{y},\ (2).$$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $y \geq 0$. Με τον περιορισμό αυτόν, από την εξίσωση (2) προκύπτει η εξίσωση $(y-2)^2 = y$, η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$y^2 - 4y + 4 = y \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y = 1 \quad ή \quad y = 4).$$

Από τις τιμές αυτές, μόνο η $y = 4$ είναι ρίζα της εξίσωσης (2). Έτσι, λόγω της εξίσωσης (1), έχουμε:

$$x^2 + x - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad ή \quad x = 2.$$

ii. Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x - 1 \geq 0$ και $x - 4 \geq 0$ και $x + 4 \geq 0$, δηλαδή $x \geq 4$. Με τον περιορισμό αυτόν, από την εξίσωση αυτήν προκύπτουν διαδοχικά οι εξισώσεις:

$$\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4}\right)^2 = \left(\sqrt{x+4}\right)^2 \Rightarrow x - 1 + x - 4 + 2\sqrt{(x-1)(x-4)} = x + 4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(x-4)} = 9 - x \Rightarrow \left(2\sqrt{(x-1)(x-4)}\right)^2 = (9-x)^2$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2 - 5x + 4\right) = 81 - 18x + x^2 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 65 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm 28}{6} = \begin{cases} 5 \\ -\dfrac{13}{3} \end{cases}.$$

Από τις τιμές αυτές του x, μόνο η $x = 5$ είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

4. **i.** Πρέπει $x-1\geq 0$, δηλαδή $x\geq 1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $\alpha<0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη,
- αν $\alpha\geq 0$, τότε $\sqrt{x-1}=\alpha \Leftrightarrow x-1=\alpha^2 \Leftrightarrow x=\alpha^2+1$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $2x-\lambda<0$, δηλαδή $x<\frac{\lambda}{2}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη,
- αν $2x-\lambda\geq 0$, δηλαδή $x\geq\frac{\lambda}{2}$, τότε:

$$\sqrt{4x^2+1}=2x-\lambda \Leftrightarrow 4x^2+1=4x^2-4\lambda x+\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda x=\lambda^2-1.$$

Η τελευταία εξίσωση:

- αν $\lambda=0$, τότε είναι αδύνατη, ενώ
- αν $\lambda\neq 0$, τότε έχει μία λύση, την $x=\frac{\lambda^2-1}{4\lambda}$. Η λύση αυτή είναι δεκτή μόνο αν επαληθεύει τον περιορισμό $x\geq\frac{\lambda}{2}$, δηλαδή μόνο αν:

$$\frac{\lambda^2-1}{4\lambda}\geq\frac{\lambda}{2}\Leftrightarrow\frac{-\left(\lambda^2+1\right)}{4\lambda}\geq 0\Leftrightarrow 4\lambda\cdot(\lambda^2+1)\leq 0\Leftrightarrow \lambda<0.$$

5. Η εξίσωση γράφεται:

$2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x-3(1-\eta\mu^2x)-3\eta\mu x+4=0$

ή $2\eta\mu^4x-3\eta\mu^3x+3\eta\mu^2x-3\eta\mu x+1=0$.

Αν θέσουμε $\eta\mu x=y$, τότε βρίσκουμε την πολυωνυμική εξίσωση:

$$2y^4-3y^3+3y^2-3y+1=0,\ (1).$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι ± 1. Με το σχήμα Horner για $\rho=1$ βρίσκουμε:

2	–3	3	–3	1	ρ = 1
	2	–1	2	–1	
2	–1	2	–1	0	

οπότε η εξίσωση (1) διαδοχικά γίνεται:

$$(y-1)\left(2y^3-y^2+2y-1\right)=0 \Leftrightarrow (y-1)\cdot\left|y^2(2y-1)+2y-1\right|=0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)(2y-1)\left(y^2+1\right)=0$$

και έχει ρίζες $y_1=1$ και $y_2=\frac{1}{2}$. Επομένως, έχουμε $\eta\mu x=1$ ή $\eta\mu x=\frac{1}{2}$,

δηλαδή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. Θεωρούμε τη διαφορά:

$$\begin{aligned}P(x)-\left(x^2+x+1\right)&=x^{3\nu}+x^{3\mu+1}+x^{3\rho+2}-x^2-x-1\\&=x^{3\nu}-1+x^{3\mu+1}-x+x^{3\rho+2}-x^2\\&=\left(x^3\right)^{\nu}-1+x\cdot\left[\left(x^3\right)^{\mu}-1\right]+x^2\cdot\left[\left(x^3\right)^{\rho}-1\right]\\&=\left(x^3-1\right)\cdot\pi_1(x)+x\left(x^3-1\right)\cdot\pi_2(x)+x^2\left(x^3-1\right)\cdot\pi_3(x)\\&=\left(x^3-1\right)\cdot\pi(x),\ \text{όπου } \pi(x) \text{ ένα πολυώνυμο του } x.\end{aligned}$$

Επομένως
$$\begin{aligned}P(x)&=\left(x^2+x+1\right)+\left(x^3-1\right)\cdot\pi(x)\\&=x^2+x+1+(x-1)\left(x^2+x+1\right)\cdot\pi(x)\\&=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left[1+(x-1)\cdot\pi(x)\right]\\&=\left(x^2+x+1\right)\cdot\pi_1(x),\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι το P(x) διαιρείται με το x^2+x+1.

2. **i.** Το πολυώνυμο f(x) γράφεται:

$$\begin{aligned}f(x)=\nu x^{\nu+1}-\nu x^{\nu}-x^{\nu}+1&=\nu x^{\nu}(x-1)-\left(x^{\nu}-1\right)\\&=\nu x^{\nu}(x-1)-(x-1)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1\right)\\&=(x-1)\cdot\left[\nu x^{\nu}-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-\ldots-x-1\right].\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $P(x)=\nu x^{\nu}-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-\ldots-x-1$, τότε είναι:

$$f(x)=(x-1)\cdot P(x) \quad \text{και} \quad P(1)=\nu-1-1-\ldots-1-1=\nu-\nu=0,$$

οπότε $P(x)=(x-1)\cdot\pi(x)$, όπου π(x) πολυώνυμο του x.

Επομένως $f(x)=(x-1)(x-1)\cdot\pi(x)=(x-1)^2\cdot\pi(x)$, που σημαίνει ότι το f(x) διαιρείται με το $(x-1)^2$.

Το πηλίκο π(x) υπολογίζεται με το σχήμα Horner, για το πολυώνυμο P(x) και για ρ = 1, ως εξής:

ν	–1	–1	...	–1	–1	ρ = 1
	ν	ν – 1	...	ν – ν + 2	1	
ν	ν – 1	ν – 2	...	1	0	

Έχουμε δηλαδή $\pi(x) = \nu x^{\nu-1} + (\nu-1)x^{\nu-2} + ... + 1$.

ii. Το g(x) γράφεται:

$$\begin{aligned} g(x) &= (\nu-2)x^{\nu} - \nu x^{\nu-1} + \nu x - \nu + 2 = \nu x^{\nu} - 2x^{\nu} - \nu x^{\nu-1} + \nu x - \nu + 2 \\ &= \nu x^{\nu-1}(x-1) - 2(x^{\nu}-1) + \nu(x-1) \\ &= \nu x^{\nu-1}(x-1) - 2(x-1)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + ... + x + 1) + \nu(x-1) \\ &= (x-1)\cdot\left[\nu x^{\nu-1} - 2x^{\nu-1} - 2x^{\nu-2} - ... - 2x - 2 + \nu\right]. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $P(x) = \nu x^{\nu-1} - 2x^{\nu-1} - 2x^{\nu-2} - ... - 2x - 2 + \nu$, τότε:

$g(x) = (x-1)\cdot P(x),\ (1)$ και $P(1) = \nu - 2 - 2 - ... - 2 + \nu = 2\nu - 2\nu = 0$,

οπότε $P(x) = (x-1)\cdot Q(x)$, όπου Q(x) πολυώνυμο του x.

Επομένως $g(x) = (x-1)^2\cdot Q(x),\ (2)$.

Υπολογίζουμε το Q(x) με το σχήμα Horner ως εξής:

ν – 2	–2	–2	...	–2	ν – 2	ρ = 1
	ν – 2	ν – 4	...	ν – 2(ν – 2)	–ν + 2	
ν – 2	ν – 4	ν – 6	...	ν – 2(ν – 1)	0	

Έχουμε δηλαδή:

$$Q(x) = (\nu-2)x^{\nu-2} + (\nu-4)x^{\nu-3} + (\nu-6)x^{\nu-4} + ... + [\nu - 2(\nu-1)].$$

Ακόμη, έχουμε:

$$\begin{aligned} Q(1) &= (\nu-2) + (\nu-4) + (\nu-6) + ... + [\nu - 2(\nu-1)] \\ &= \nu - 2 + \nu - 2\cdot 2 + \nu - 2\cdot 3 + ... + \nu - 2(\nu-1) \\ &= (\nu + \nu + ... + \nu) - 2\cdot|1 + 2 + 3 + ... + (\nu-1)| \end{aligned}$$

(άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου)

$$= \nu(\nu-1) - 2\cdot\frac{[1+(\nu-1)](\nu-1)}{2} = \nu(\nu-1) - \nu(\nu-1) = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι x – 1 είναι παράγοντας του Q(x), δηλαδή:

$$Q(x) = (x-1)\cdot\Pi(x),\ (3).$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε:

$$g(x)=(x-1)^3\cdot\pi(x).$$

Επομένως, το g(x) διαιρείται με το $(x-1)^3$.

3. i. Η εξίσωση είναι αντίστροφη και το 0 δεν είναι ρίζα της, οπότε έχουμε:

$$x^4+2x^3+2x+1=0\Leftrightarrow x^2+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad (\text{διαιρούμε με } x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

Αν θέσουμε $x+\frac{1}{x}=y$, τότε $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2-2+2y=0\Leftrightarrow y^2+2y-2=0\Leftrightarrow y=-1-\sqrt{3} \quad ή \quad y=-1+\sqrt{3}.$$

Έτσι, είναι $x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{3}$ ή $x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{3}$ ή ισοδύναμα:

$$x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x+1=0 \quad ή \quad x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x+1=0.$$

Είναι $\Delta_1=\left(1+\sqrt{3}\right)^2-4=2\sqrt{3}$ και $\Delta_2=\left(1-\sqrt{3}\right)^2-4=-2\sqrt{3}<0$,

οπότε η δεύτερη εξίσωση δεν έχει ρίζες, ενώ η πρώτη έχει τις:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}}{2} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt[4]{12}}{2},$$

που είναι και οι ρίζες της αρχικής.

ii. Η εξίσωση δεν έχει ρίζα το 0, έτσι, αν διαιρέσουμε με x^2, τότε έχουμε:

$$x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}-4=0.$$

Αν θέσουμε $x+\frac{1}{x}=y$, τότε $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2-2+y-4=0 \quad ή \quad y^2+y-6=0$$

και έχει ρίζες $y_1=-3$ και $y_2=2$.

Έτσι, έχουμε $x+\frac{1}{x}=-3$ ή $x+\frac{1}{x}=2$ ή ισοδύναμα:

$$x^2+3x+1=0 \quad ή \quad x^2-2x+1=0.$$

Αυτές έχουν ρίζες $x_1=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ η πρώτη και $x_3=1$ η δεύτερη.

Επομένως, οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι:

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{-3-\sqrt{5}}{2},\quad 1.$$

4. **i.** Επειδή το $x=0$ δεν είναι ρίζα, διαιρούμε με x^2 και έχουμε:

$$x^2+x-16-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{4}{x^2}+x-\frac{2}{x}-16=0.$$

Αν θέσουμε $x-\dfrac{2}{x}=y$, τότε $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2=y^2$, οπότε:

$$x^2+\frac{4}{x^2}-2x\cdot\frac{2}{x}=y^2,\quad \text{δηλαδή}\quad x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+4$$

και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2+4+y-16=0 \quad \text{ή} \quad y^2+y-12=0,$$

που έχει ρίζες $y_1=-4$ και $y_2=3$.

Επομένως $\quad x-\dfrac{2}{x}=-4 \quad$ ή $\quad x-\dfrac{2}{x}=3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-2=0 \quad \text{ή} \quad x^2-3x-2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{6} \quad \text{ή} \quad x=-2+\sqrt{6} \quad \text{ή} \quad x=\frac{3-\sqrt{17}}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

ii. Επειδή το $x=0$ δεν είναι ρίζα, διαιρούμε με το x^2 και η εξίσωση γράφεται:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+8\left(x-\frac{1}{x}\right)+13=0.$$

Αν θέσουμε $x-\dfrac{1}{x}=y$, τότε $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2+2$ και η εξίσωση γίνεται $y^2+8y+15=0$,

που έχει ρίζες $y_1=3$ και $y_2=-5$.

Επομένως, διαδοχικά έχουμε:

$$x-\frac{1}{x}=-3 \quad \text{ή} \quad x-\frac{1}{x}=-5 \Leftrightarrow x^2+3x-1=0 \quad \text{ή} \quad x^2+5x-1=0.$$

Οι τελευταίες έχουν ρίζες:

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{13}}{2},\quad x_2=\frac{-3+\sqrt{13}}{2} \quad \text{και} \quad x_3=\frac{-5-\sqrt{29}}{2},\quad x_4=\frac{-5+\sqrt{29}}{2}$$

αντίστοιχα. Αυτές όλες είναι οι ρίζες της αρχικής.

5. Αν θέσουμε $x^2+2x-1=y$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$y^2-3(y+4)+14=0 \quad ή \quad y^2-3y+2=0$$

και έχει ρίζες $y_1=1$ και $y_2=2$, οπότε έχουμε:

- $x^2+2x-1=1 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}$ ή
- $x^2+2x-1=2 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-3$.

Επομένως, οι ρίζες της αρχικής είναι:

$$x_1=-1-\sqrt{3},\quad x_2=-1+\sqrt{3},\quad x_3=1,\quad x_4=-3.$$

6. Από την ταυτότητα της διαίρεσης προκύπτει ότι:

$$x^5+3x^2+\alpha x+\beta=(x^2-2)\cdot\pi(x)+5x+8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^5+3x^2+\alpha x+\beta=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\pi(x)+5x+8.$$

Για $x=\sqrt{2}$ έχουμε:

$$\left(\sqrt{2}\right)^5+3\left(\sqrt{2}\right)^2+\alpha\sqrt{2}+\beta=0+5\sqrt{2}+8 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}+6+\alpha\sqrt{2}+\beta=5\sqrt{2}+8$$
$$\Leftrightarrow \alpha\sqrt{2}+\beta=\sqrt{2}+2,\ (1).$$

Για $x=-\sqrt{2}$, με όμοιο τρόπο προκύπτει $\alpha\sqrt{2}-\beta=\sqrt{2}-2,\ (2)$.

Λύνοντας το σύστημα των σχέσεων (1) και (2) βρίσκουμε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$.

7. Με το σχήμα Horner παίρνουμε:

1	–12	12	–12	...	12	–1	ρ = 11
	11	–11	11	...	–11	11	
1	–1	1	–1	...	1	10	

Επομένως $P(11)=10$.

Αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το P(13) με τον ίδιο τρόπο, τότε θα διαπιστώσουμε ότι οι πράξεις είναι αρκετά επίπονες. Ένας πιο σύντομος τρόπος είναι ο εξής:

Το $P(x)=x^{17}-1-12x\cdot\underbrace{\left(x^{15}-x^{14}+x^{13}-\ldots+x-1\right)}_{\text{(άθροισμα διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου)}}=x^{17}-1-12x\cdot\dfrac{x^{16}-1}{x+1}=x^{17}-1-12\cdot\dfrac{x^{17}-x}{x+1}.$

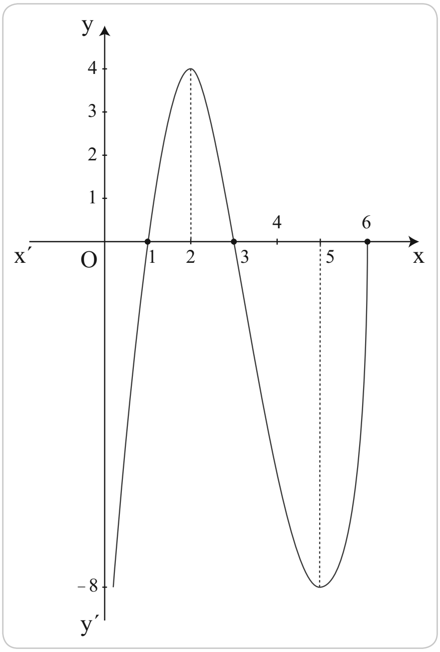
Οπότε $P(13)=13^{17}-1-2\cdot\dfrac{13^{17}-13}{13+1}=13^{17}-1-\dfrac{13^{17}-13}{7}=\dfrac{6\left(13^{17}+1\right)}{7}$.

Με έναν υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε το 13^{17} και έτσι έχουμε το Ρ(13).

8. Ο παγετώνας τελειώνει όταν η θερμοκρασία $T=T(x)$ ανερχόμενη συνεχώς μηδενίζεται, ενώ αυτός ξαναρχίζει όταν η θερμοκρασία κατερχόμενη μηδενίζεται. Για να λύσουμε, λοιπόν, το πρόβλημα, αρκεί να βρούμε τα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης Τ(x) καθώς, επίσης, και τα διαστήματα μονοτονίας της.

Αν θέσουμε Τ = 0, τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$
\begin{aligned}
&10x^3-100x^2+270x-180=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x^3-10x^2+27x-18=0\\
&\Leftrightarrow x^3-9x^2-x^2+9x+18x-18=0\\
&\Leftrightarrow x^2(x-1)-9x(x-1)+18(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-9x+18\right)=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(x-6)=0.
\end{aligned}
$$



Με τη βοήθεια των ριζών και ενός πίνακα τιμών, βρίσκουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$T_1(x)=x^3-10x^2+27x-18.$$

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης βρίσκουμε ότι:

i. το τέλος των παγετώνων θα έρθει μετά από 1 εκατομμύριο χρόνια.

ii. ο επόμενος παγετώνας θα αρχίσει σε 3 εκατομμύρια χρόνια και θα διαρκέσει 6 – 3 = 3 εκατομμύρια χρόνια.

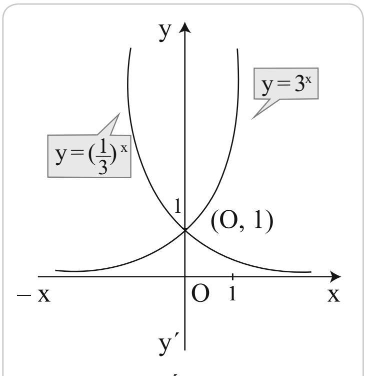
5.1 Εκθετική συνάρτηση

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. • Για τη συνάρτηση $f(x)=3^x$, εργαζόμαστε όπως στην § 4.1 του σχολικού βιβλίου για την $f(x)=2^x$ και παίρνουμε το σχήμα.

• Είναι $f_1(x)=\dfrac{1}{3^x}=3^{-x}=f(-x)$.

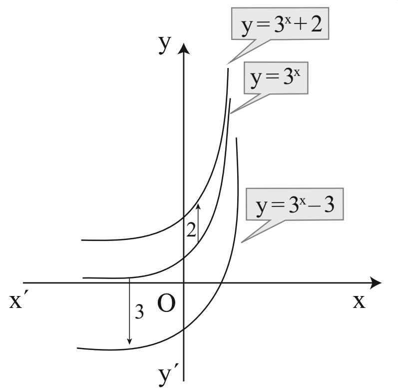
Επομένως, η γραφική παράσταση της $f_1(x)=3^{-x}$ θα είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $f(x)=3^x$ ως προς τον άξονα y′y (Σχ. α).



σχήμα α

ii. • Η γραφική παράσταση της $f_2(x)=3^x+2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=3^x$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχ. β).

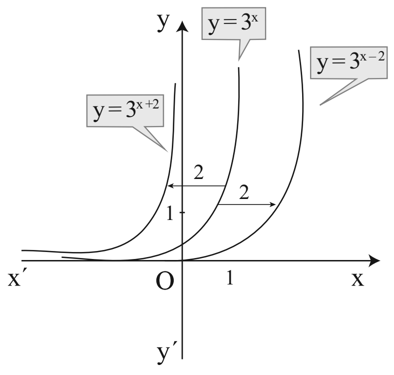
• Η γραφική παράσταση της $f_3(x)=3^x-3$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=3^x$ κατά 3 μονάδες προς τα κάτω (Σχ. β).



σχήμα β

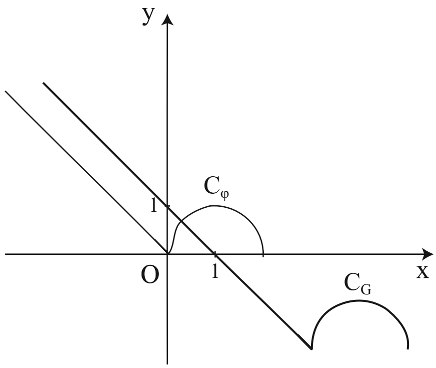
iii. • Η γραφική παράσταση της $f_4(x)=3^{x-2}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=3^x$ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (Σχ. γ).

• Η γραφική παράσταση της $f_5(x)=3^{x+2}$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=3^x$ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά (Σχ. γ).



σχήμα γ

iv. • Η γραφική παράσταση της $f_6(x)=3^{x-2}+1$ προκύπτει από έναν συνδυασμό μετατοπίσεων της γραφικής παράστασης της $f(x)=3^x$, πρώτα μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και έπειτα μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (Σχ. δ).

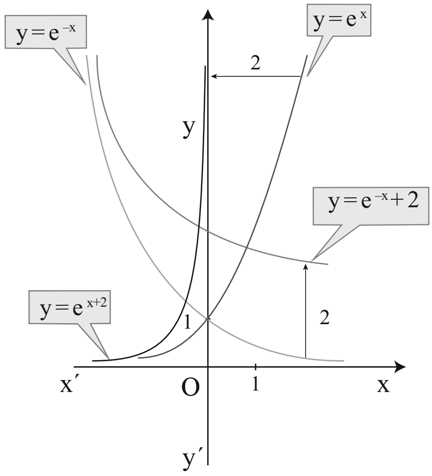


σχήμα δ

v. • Είναι ήδη γνωστή η γραφική παράσταση της $g(x)=e^x$.

• Η γραφική παράσταση της $g_1(x)=e^{x+2}$ προκύπτει μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $g(x)=e^x$ κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.

• Η γραφική παράσταση της $g_2(x)=e^{-x}$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x)=e^x$ ως προς τον άξονα y′y.



σχήμα ε

- Η γραφική παράσταση της $g_3(x)=e^{-x}+2$ προκύπτει μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $g_2(x)=e^{-x}$ κατά δύο μονάδες προς τα πάνω.

2. • Για κάθε εξίσωση διαδοχικά έχουμε:

i. $2^x=64 \Leftrightarrow 2^x=2^6 \Leftrightarrow x=6.$

ii. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x=3.$

iii. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^{-2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x=-2.$

iv. $3^{-x}=\frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x=4.$

v. $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{64}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \Leftrightarrow x=-3.$

vi. $27^{4x}=9^{x+1} \Leftrightarrow \left(3^3\right)^{4x}=\left(3^2\right)^{x+1} \Leftrightarrow 3^{12x}=3^{2x+2} \Leftrightarrow 12x=2x+2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}.$

vii. $32^x=16^{1-x} \Leftrightarrow \left(2^5\right)^x=\left(2^4\right)^{1-x} \Leftrightarrow 2^{5x}=2^{4-4x} \Leftrightarrow 5x=4-4x \Leftrightarrow x=\frac{4}{9}.$

viii. $3^{x^2-x-2}=1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \quad ή \quad x=-1.$

3. **i.** Η εξίσωση γράφεται $2\cdot 2^{2x}-4\cdot 2^x=0$.

Αν θέσουμε $2^x=y$, τότε αυτή γίνεται $2y^2-4y=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς 0 και 2. Επομένως, η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων $2^x=0$ και $2^x=2$. Η $2^x=0$ είναι αδύνατη, ενώ η $2^x=2$ γράφεται $2^x=2^1$ και έχει ρίζα το $x=1$, που είναι και η μοναδική ρίζα της αρχικής.

ii. Η εξίσωση γράφεται $2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2=0$.

Αν θέσουμε $2^x=y>0$, τότε αυτή γίνεται $2y^2-5y+2=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και 2. Επομένως, η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων $2^x=\frac{1}{2}$ και $2^x=2$, δηλαδή των $2^x=2^{-1}$ και $2^x=2^1$, που έχουν ρίζες τις $x=-1$, $x=1$ αντίστοιχα.

iii. Ομοίως, αν θέσουμε $3^x = y > 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $3y^2 - 26y - 9 = 0$ και έχει ρίζες $y = -\frac{1}{3}$ και $y = 9$, οπότε η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$3^x = -\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad 3^x = 9.$$

Η $3^x = -\frac{1}{3}$ είναι αδύνατη, ενώ η $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2$ έχει ρίζα την $x = 2$, που είναι και η μοναδική ρίζα της αρχικής.

4. i. Έχουμε $5^{x^2-5x+6} < 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-5x+6} < 5^0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \quad (\text{γιατί } 5 > 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

ii. Έχουμε $7^{x+1} < 7^{2x-4} \Leftrightarrow x + 1 < 2x - 4 \quad (\text{γιατί } 7 > 1)$

$$\Leftrightarrow x > 5.$$

iii. Έχουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4} \Leftrightarrow x + 1 > 2x - 4 \quad (\text{γιατί } 0 < \frac{1}{2} < 1)$

$$\Leftrightarrow x < 5.$$

5. i. Έχουμε:

- $8^{2x+1} = 32 \cdot 4^{4y-1} \Leftrightarrow \left(2^3\right)^{2x+1} = \left(2^5\right) \cdot \left(2^2\right)^{4y-1} \Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{8y+3} \Leftrightarrow 6x + 3 = 8y + 3 \Leftrightarrow 3x = 4y.$
- $5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1} \Leftrightarrow 5^{x-y+1} = 5^{2y+1} \Leftrightarrow x - y + 1 = 2y + 1 \Leftrightarrow x = 3y.$

Έτσι, το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 3x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 9y = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

ii. Αν θέσουμε $3^x = \varphi$ και $2^y = \omega$, τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \varphi + \omega = 11 \\ \varphi - \omega = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\varphi = 18 \\ 2\omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 9 \\ \omega = 2 \end{cases}.$$

Άρα, το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} 3^x = 9 \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3^2 \\ 2^y = 2^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

6. i. Έχουμε:

$$\begin{cases} e^x : e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x-y} = e^0 \\ e^{x+y} = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

ii. Θέτουμε $2^x = z$ και $2^y = w$, οπότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} z \cdot w = 8 \\ z + w = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(6-z) = 8 \\ w = 6 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 - 6z + 8 = 0 \\ w = 6 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \text{ ή } z = 4 \\ w = 6 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ w = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} z = 4 \\ w = 2 \end{cases}.$$

Επομένως:

- αν $\begin{cases} z = 2 \\ w = 4 \end{cases}$, τότε $\begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^y = 4 \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$,
- αν $\begin{cases} z = 4 \\ w = 2 \end{cases}$, τότε $\begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^y = 2 \end{cases}$, οπότε $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

7. Οι ρίζες της εξίσωσης $w^2 - 101w + 100 = 0$ είναι οι 1 και 100. Επομένως:

$$w^2 - 101w + 100 < 0 \Leftrightarrow 1 < w < 100, \ (1).$$

Για την επίλυση της ανίσωσης $10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 101 < 0$, θέτουμε $10^x = w$, οπότε έχουμε να επιλύσουμε την ανίσωση $w^2 - 101w + 100 < 0$.

Λόγω της σχέσης (1), η ανίσωση αυτή αληθεύει όταν $1 < w < 100$, οπότε έχουμε:

$$1 < 10^x < 100 \Leftrightarrow 10^0 < 10^x < 10^2 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. • Η f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν είναι:

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow (2-\alpha)(2\alpha-1) > 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(2\alpha-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 2.$$

i. Η f είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνο αν είναι:

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha-2\alpha+1}{2\alpha-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{3-3\alpha}{2\alpha-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3(1-\alpha)(2\alpha-1) > 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(2\alpha-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν είναι:

$$0 < \frac{2\alpha}{2\alpha-1} < 1.$$

Βρήκαμε, όμως, ότι:

$$0<\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\alpha<2,\ (1).$$

Αν εργαστούμε όπως στην (i), τότε βρίσκουμε ακόμη ότι:

$$\frac{2-\alpha}{2\alpha-1}<1\Leftrightarrow\alpha<\frac{1}{2}\quad ή\quad \alpha>1,\quad (2).$$

Οι σχέσεις (1) και (2) συναληθεύουν για $1<\alpha<2$. Για αυτές τις τιμές του α, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

2. i. Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{4^x}{4}-5\cdot\sqrt{\frac{4^x}{4^2}}+1=0\ \Leftrightarrow\frac{1}{4}\cdot4^x-\frac{5}{4}\cdot\sqrt{2^{2x}}+1=0$$
$$\Leftrightarrow 4^x-5\cdot2^x+4=0\Leftrightarrow 2^{2x}-5\cdot2^x+4=0.$$

Αν θέσουμε $2^x=y>0$, τότε αυτή γίνεται $y^2-5y+4=0$ και έχει ρίζες $y=1$ και $y=4$, οπότε η αρχική είναι ισοδύναμη με τις $2^x=1$ ή $2^x=4$. Επομένως, οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι $x=0$ ή $x=2$.

ii. Η εξίσωση γράφεται:

$$3^x+\frac{1}{3}\cdot3^x=\frac{45}{9\cdot3^x}+\frac{7}{3^x}\ \Leftrightarrow\frac{4}{3}\cdot3^x=\frac{5}{3^x}+\frac{7}{3^x}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\cdot3^x=\frac{12}{3^x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{4}{3}\cdot3^{2x}=12\Leftrightarrow3^{2x}=\frac{12\cdot3}{4}$$
$$\Leftrightarrow3^{2x}=3^2\Leftrightarrow x=1.$$

iii. Η εξίσωση γράφεται:

$$21\cdot3^x+5^{x+3}=3^{x+4}+5^{x+2}\Leftrightarrow21\cdot3^x-3^4\cdot3^x=5^2\cdot5^x-5^3\cdot5^x$$
$$\Leftrightarrow-60\cdot3^x=-100\cdot5^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1.$$

iv. Η εξίσωση γράφεται:

$$9^x+9^x=\frac{11}{4}\cdot4^x+4\cdot4^x\ \Leftrightarrow2\cdot9^x=\frac{27}{4}\cdot4^x\Leftrightarrow\left(\frac{9}{4}\right)^x=\frac{27}{8}$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\Leftrightarrow2x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

v. Η εξίσωση γράφεται:

$$4^x - \frac{3}{3^{\frac{1}{2}}} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2^{2x}}{2} \Leftrightarrow 4^x - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\cdot 3^x - \frac{4^x}{2} \Leftrightarrow 4^x + \frac{4^x}{2} = \sqrt{3}\cdot 3^x + \frac{3^x}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

3. i. Αν θέσουμε $3^y = \omega > 0$ και $2^x = \varphi > 0$, τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} \omega - \varphi = 1 \\ \omega - \dfrac{16}{\varphi} = 11 \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} \omega = 1 + \varphi \\ 1 + \varphi - \dfrac{16}{\varphi} = 11 \end{cases}.$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $\varphi^2 - 10\varphi + 16 = 0$ και έχει ρίζες $\varphi = 2$ και $\varphi = 8$, οπότε από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε για $\varphi = 2$, $\omega = 1 + 2 = 3$, ενώ για $\varphi = 8$, $\omega = 1 + 8 = 9$. Επομένως, το αρχικό σύστημα έχει ως λύσεις τις λύσεις των συστημάτων:

$$(\Sigma_1): \begin{cases} 3^y = 3 \\ 2^x = 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2): \begin{cases} 3^y = 9 \\ 2^x = 8 \end{cases},$$

που είναι τα ζεύγη $(x = 1,\ y = 1)$ και $(x = 3,\ y = 2)$ αντίστοιχα.

ii. Το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 5^x \cdot 2^y = 40 \end{cases}.$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη της 1ης εξίσωσης με τα αντίστοιχα μέλη της 2ης, τότε παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} 2^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 10000 \\ 5^x \cdot 2^y = 40 \end{cases}.$$

Η 1η εξίσωση γράφεται:

$$10^{x+y} = 10^4 \Leftrightarrow x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x,$$

οπότε η 2η γίνεται:

$$5^x \cdot 2^{4-x} = 40 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

Έχουμε τότε $y = 4 - 1 = 3$ και η λύση του συστήματος είναι $(x = 1,\ y = 3)$.

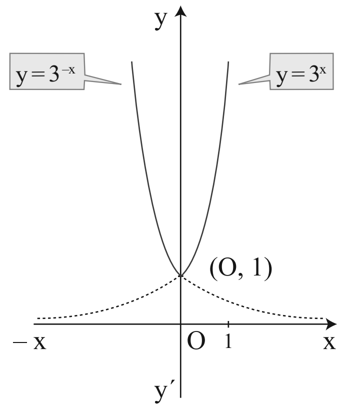
4. i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι άρτια (αφού $f(-x)=3^{|-x|}=3^{|x|}=f(x)$) και γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}3^{x} & , \text{ αν } x\geq 0\\ 3^{-x} & , \text{ αν } x<0\end{cases}.$$

Λόγω της συμμετρίας ως προς τον άξονα y′y περιοριζόμαστε στο διάστημα $[0,+\infty)$, όπου η 3^x είναι γνησίως αύξουσα (γιατί 3 > 1) και κατασκευάζουμε τον πίνακα:

x	0	0,5	1	1,5	2
3^x	1	1,73	3	5,2	9

Με τη βοήθεια αυτού και της συμμετρίας, χαράσσουμε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της $f(x)=3^{|x|}$.

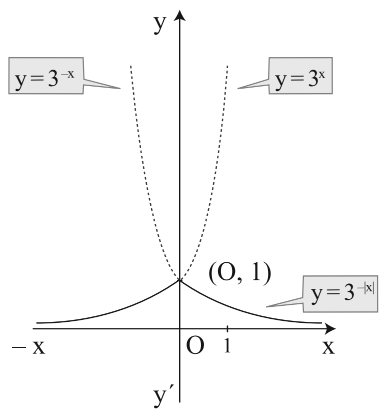


Σχήμα ii

ii. Η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}3^{-x} & , \text{ αν } x\geq 0\\ 3^{x} & , \text{ αν } x<0\end{cases}.$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα διακεκομμένα τμήματα του σχήματος (ii). Έτσι, για τη γραφική παράσταση της $f(x)=3^{-|x|}$ έχουμε το διπλανό σχήμα (iii).



Σχήμα iii

5. Έχουμε:

$$\begin{aligned}f^2(x)-g^2(x)&=\frac{1}{4}\left(\alpha^x+\alpha^{-x}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\alpha^x-\alpha^{-x}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(\alpha^{2x}+2\alpha^x\cdot\alpha^{-x}+\alpha^{-2x}-\alpha^{2x}+2\alpha^x\cdot\alpha^{-x}-\alpha^{-2x}\right)\\&=\frac{1}{4}\cdot(2+2)=1.\end{aligned}$$

6. i. Στο τέλος της 1ης εβδομάδας, η ποσότητα της βενζίνης που θα έχει εξατμιστεί θα είναι $5\cdot\frac{20}{100}=5\cdot 0,2$, οπότε η βενζίνη που θα έχει απομείνει στο δοχείο θα είναι:

$$Q_1 = 5-5\cdot 0,2 = 5\cdot(1-0,2) = 5\cdot 0,8.$$

Ομοίως, η ποσότητα της βενζίνης, στο τέλος:

– της 2ης εβδομάδας, θα είναι $Q_2 = Q_1\cdot 0,8 = 5\cdot(0,8)^2$

– της 3ης εβδομάδας, θα είναι $Q_3 = Q_2\cdot 0,8 = 5\cdot(0,8)^3$

....

– της t εβδομάδας, θα είναι $Q_1 = 5\cdot(0,8)^t$.

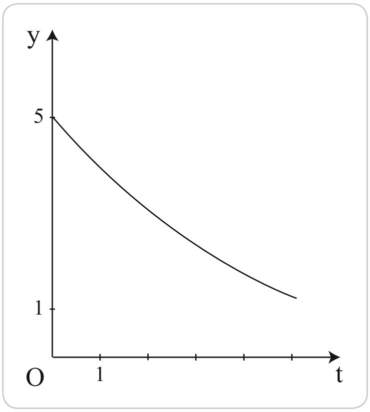
Επομένως, η συνάρτηση που ζητάμε είναι $Q(t)=5\cdot(0,8)^t$.

ii. Επειδή 0,8 < 1, η συνάρτηση είναι φθίνουσα.

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών (t ≥ 0).

t	0	1	2	3	4	5	6	7
Q(t)	5	4	3,2	2,56	2	1,6	1,3	1

Με τη βοήθεια αυτού χαράσσουμε μια πρόχειρη γραφική παράσταση.



iii. Είναι $Q(40)=5\cdot(0,8)^{40}\simeq 0,0000132$ λίτρα.

Επομένως, μετά από 40 εβδομάδες θα έχουν απομείνει 0,0000132 λίτρα βενζίνης.

7. i. Επειδή η ποσότητα Q του ραδιενεργού υλικού ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης, θα έχουμε διαδοχικά:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$$

$$Q(t) = 5 \cdot e^{ct} \quad (\text{γιατί } Q_0 = 5 \text{ γραμ.}), \quad (1).$$

Επειδή ο χρόνος υποδιπλασιασμού είναι t = 1600 έτη, από τη σχέση (1) θα έχουμε διαδοχικά:

$$Q(1600) = 5 \cdot e^{c \cdot 1600} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = 5 \cdot e^{1600c} \Leftrightarrow e^{1600c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(e^c\right)^{1600} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^c = \sqrt[1600]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}.$$

Επομένως, ο τύπος (1) γράφεται:

$$Q(t) = 5 \cdot \left(e^c\right)^t = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}} = 5 \cdot (0,5)^{\frac{t}{1600}}.$$

ii. $Q(600) = 5 \cdot (0,5)^{\frac{600}{1600}} = 5 \cdot (0,5)^{\frac{3}{8}} \simeq 3,86$ γραμ.

iii. $Q(20000) = 5 \cdot (0,5)^{\frac{20000}{1600}} = 5 \cdot (0,5)^{125} \simeq 0,001$ γραμ.

Οι υπολογισμοί να γίνουν με υπολογιστή τσέπης.

8. **i.** Η τιμή του αυτοκινήτου σε χιλιάδες, στο τέλος:

– του 1ου χρόνου, θα είναι $T_1 = 40 - 40 \cdot 0,15 = 40 \cdot 0,85$

– του 2ου χρόνου, θα είναι $T_2 = T_1 \cdot 0,85 = 40 \cdot (0,85)^2$

– του 3ου χρόνου, θα είναι $T_3 = T_2 \cdot 0,85 = 40 \cdot (0,85)^3$

…………………………………

– του t χρόνου, θα είναι $T_t = 40 \cdot (0,85)^t$, $t \leq 6$.

Επομένως, η συνάρτηση που ζητάμε είναι $T_t = 40 \cdot (0,85)^t$, $t \leq 6$.

ii. Η τιμή του αυτοκινήτου στο τέλος του 6ου χρόνου θα είναι:

$$T(6) = 40 \cdot (0,85)^6 \simeq 15,085 \text{ χιλιάδες ευρώ, δηλαδή 15.085 ευρώ.}$$

9. **i.** Έχουμε $e^{-0,5x} = \frac{1}{e^{0,5x}} = \frac{1}{\left(e^x\right)^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

Έτσι, για:

– $x = 0$, είναι $e^{-0,5 \cdot 0} = e^0 = 1$

– $x = 1$, είναι $e^{-0,5\cdot 1} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,606$

– $x = 2$, είναι $e^{-0,5\cdot 2} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \simeq 0,368$

– $x = 3$, είναι $e^{-0,5\cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{e^3}} = \dfrac{1}{e\sqrt{e}} \simeq 0,223$

– $x = 4$, είναι $e^{-0,5\cdot 4} = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \simeq 0,135$

……………………………………

– $x = 5$, είναι $e^{-0,5\cdot 5} = \dfrac{1}{\sqrt{e^5}} = \dfrac{1}{e^2\sqrt{e}} \simeq 0,082.$

ii. Έχουμε $I(x) = I_0 \cdot e^{-0,5x}$, οπότε $\dfrac{I(x)}{I_0} = e^{-0,5x}$.

α. Είναι $\dfrac{I(x)}{I_0} = 1 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = 1 \Leftrightarrow -0,5x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

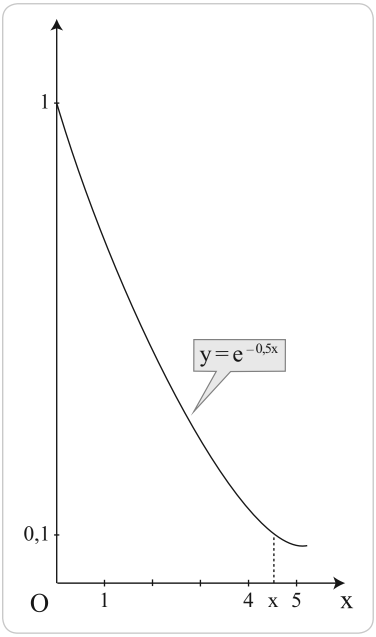
β. Είναι $\dfrac{I(x)}{I_0} = 0,1 \Leftrightarrow e^{-0,5x} = 0,1.$

Από την (i) βλέπουμε ότι η τιμή του $e^{-0,5x}$ που είναι πλησιέστερη στο 0,1 είναι η 0,082 και αντιστοιχεί στο x = 5. Επομένως, η τιμή του x που ζητάμε είναι το 5 (αφού η $e^{-0,5x}$ είναι φθίνουσα).

iii. Με τη βοήθεια του πίνακα τιμών:

x	0	1	2	3	4	5
$\dfrac{I(x)}{I_0} = e^{-0,5x}$	1	0,605	0,368	0,223	0,135	0,082

Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $y = e^{-0,5x}$. Από αυτήν, βλέπουμε ότι η τετμημένη x του σημείου Μ είναι πλησιέστερα στον ακέραιο 5, πράγμα που επιβεβαιώνει την τιμή x = 5 που βρήκαμε προηγουμένως.



10. i. Έχουμε $e^{-2t} = \frac{1}{e^{2t}}$, οπότε για:

– $t = 0$, είναι $e^{-2\cdot 0} = 1$

– $t = 1$, είναι $e^{-2\cdot 1} = \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}135$

– $t = 2$, είναι $e^{-2\cdot 2} = \frac{1}{e^4} \simeq 0{,}018$

– $t = 3$, είναι $e^{-2\cdot 3} = \frac{1}{e^6} \simeq 0{,}002$.

ii. Έχουμε $T(t) = T_0 \cdot (1 + e^{-2t}) \Leftrightarrow \frac{T(t)}{T_0} = 1 + e^{-2t}$. Επομένως:

α. $\frac{T(t)}{T_0} = 1{,}1 \Leftrightarrow 1 + e^{-2t} = 1{,}1 \Leftrightarrow e^{-2t} = 0{,}1$.

Από ερώτημα (i) βλέπουμε ότι η τιμή του e^{-2t} που είναι πλησιέστερη στο 0,1 είναι η 0,135, που αντιστοιχεί στο t = 1.

Επομένως, η τιμή του t που ζητάμε είναι το 1 (αφού η $f(t) = e^{-2t}$ είναι γνησίως φθίνουσα).

β. $\frac{T(t)}{T_0} = 2 \Leftrightarrow 1 + e^{-2t} = 2 \Leftrightarrow e^{-2t} = 1 \Leftrightarrow -2t = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

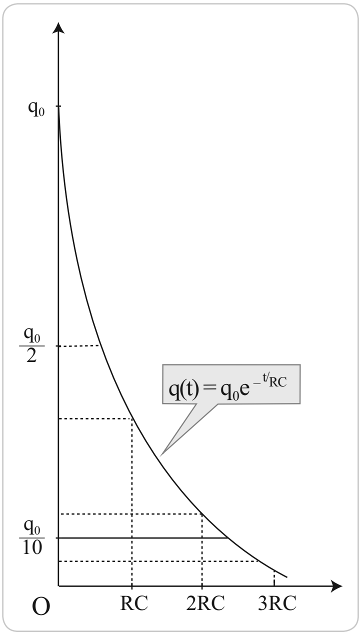
11. i. Η ελάττωση του q ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής μεταβολής, με σταθερά $-\frac{1}{RC} < 0$.

Έτσι, η συνάρτηση q(t) είναι φθίνουσα και η καμπύλη της έχει ασύμπτωτη τον άξονα των τετμημένων t′t.

Αν στον άξονα τετμημένων t′t πάρουμε το RC ως μονάδα, τότε έχουμε τον πίνακα τιμών:

t	0	RC	2RC	3RC
q	q_0	$0{,}37q_0$	$0{,}14q_0$	$0{,}05q_0$

Με τη βοήθεια των παραπάνω χαράσσουμε τη γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος.



ii. Όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση, το φορτίο γίνεται:

α. μικρότερο από $\frac{1}{2}q_0$, για όλες τις τιμές του $t = \kappa RC$, με $\kappa = 1, 2, 3, \ldots$

β. μικρότερο από $\frac{1}{10}q_0$, για όλες τις τιμές του $t = \kappa RC$, με $\kappa = 3, 4, \ldots$

5.2 Λογάριθμοι

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. Αν θέσουμε $\log_{10} 0{,}001 = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{10} 0{,}001 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}001 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$$

Άρα $\log_{10} 0{,}001 = -3$.

ii. Αν θέσουμε $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10} = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = \sqrt{10} \Leftrightarrow 10^{-x} = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow -x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Άρα $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10} = -\frac{1}{2}$.

iii. Αν θέσουμε $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{\frac{1}{2}} 32 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^5 \Leftrightarrow -x = 5 \Leftrightarrow x = -5.$$

Άρα $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$.

iv. Αν θέσουμε $\log_9 \frac{\sqrt{27}}{3} = x$, τότε έχουμε:

$$\log_9 \frac{\sqrt{27}}{3} = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{\sqrt{27}}{3} \Leftrightarrow 9^x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Άρα $\log_9 \frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{1}{4}$.

v. Αν θέσουμε $\log_{\sqrt{2}} 16 = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{\sqrt{2}} 16 = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = 16 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

Άρα $\log_{\sqrt{2}} 16 = 8$.

vi. Αν θέσουμε $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8}{27}} = x$, τότε έχουμε:

$$\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8}{27}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \sqrt{\frac{8}{27}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}.$$

Άρα $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8}{27}} = -\frac{3}{2}$.

2. **i.** $\log_{10} x = 3 \Leftrightarrow 10^3 = x \Leftrightarrow x = 1000$.

ii. $\log_4 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{-\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

iii. $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}} = x \Leftrightarrow x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$.

3. Πρέπει $0 < \alpha \neq 1$. Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

i. $\log_\alpha 16 = 4 \Leftrightarrow \alpha^4 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[4]{16} = 2$, αφού $\alpha > 0$.

ii. $\log_\alpha 8 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow \left(\alpha^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha = 8^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 4.$

iii. $\log_\alpha 0{,}1 = -3 \Leftrightarrow \alpha^{-3} = 0{,}1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 10 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{10}.$

4. **i.** $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = \log_2 3 + \log_2 4^2 - \log_2 12 = \log_2 3 + \log_2 16 - \log_2 12$

$$= \log_2 \frac{3\cdot 16}{12} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2.$$

ii. $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 8 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} \dfrac{8\cdot 5}{4} + \log_{10} 10 = 1.$

iii. $\dfrac{1}{2}\log_{10} 25 + \dfrac{1}{3}\log_{10} 8 - \dfrac{1}{5}\log_{10} 32 = \log_{10}\sqrt{25} + \log_{10}\sqrt[3]{8} - \log_{10}\sqrt[5]{32}$

$$= \log_{10} 5 + \log_{10} 2 - \log_{10} 2$$
$$= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2.$$

iv. Είναι $\log_2 6 - 2\log_2 \sqrt{3} = \log_2 6 - \log_2 3 = \log_2 2 = 1.$

Άρα, η ζητούμενη παράσταση ισούται με $2^1 = 2$.

v. $2\log_2\left(2+\sqrt{2}\right) + \log_2\left(6-4\sqrt{2}\right) = \log_2\left(2+\sqrt{2}\right)^2 + \log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$

$$= \log_2\left(6+4\sqrt{2}\right) + \log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$$
$$= \log_2\left[\left(6+4\sqrt{2}\right)\cdot\left(6-4\sqrt{2}\right)\right]$$
$$= \log_2\left(36-32\right) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2.$$

5. Ζητάμε τον t, για τον οποίο ισχύει $Q(t) = 10Q_0$. Έχουμε:

$$Q(t) = 10Q_0 \Leftrightarrow Q_0 \cdot e^{0,34t} = 10Q_0 \Leftrightarrow e^{0,34t} = 10 \Leftrightarrow 0{,}34t = \ln 10$$
$$\Leftrightarrow 0{,}34t \simeq 2{,}3026 \Leftrightarrow t \cong \frac{2{,}3026}{0{,}34} \simeq 6{,}77 \Leftrightarrow t \simeq 6\ \text{h}\ 46\ \text{min}.$$

6. **i.** Είναι h = 3050 και p = 68900. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο $P = 101300 \cdot e^{\kappa h}$ που δίνεται, έχουμε διαδοχικά:

$$68900 = 101300 \cdot e^{\kappa\cdot 3050} \Leftrightarrow e^{\kappa\cdot 3050} = \frac{689}{1013} \Leftrightarrow 3050\kappa = \ln\frac{689}{1013}$$
$$\Leftrightarrow 3050\kappa = \ln 689 - \ln 1013$$
$$\Leftrightarrow \kappa = \frac{\ln 689 - \ln 1013}{3050} \simeq -0{,}000126.$$

ii. Αν θέσουμε όπου κ = –0,000126 και h = 1000, τότε βρίσκουμε ότι:

$$p = 101300 \cdot e^{-0,126} \simeq 101300 \cdot 0,881615 \simeq 89308.$$

Άρα, η ατμοσφαιρική πίεση, σε ύψος 1000 m, είναι 89308 Pascals.

7. i. Επειδή $L = \sqrt[5]{100} \cdot L_0$, από τον τύπο που έχει δοθεί έχουμε:

$$m = 6 - 2,5 \cdot \log\sqrt[5]{100} = 6 - 2,5 \cdot \log 10^{\frac{2}{5}} = 6 - 2,5 \cdot \frac{2}{5} = 6 - 1 = 5.$$

Άρα m = 5.

ii. Από τον τύπο που δίνεται, για m = 1, έχουμε διαδοχικά:

$$1 = 6 - 2,5 \cdot \log\frac{L}{L_0} \Leftrightarrow 2,5 \cdot \log\frac{L}{L_0} = 5 \Leftrightarrow \log\frac{L}{L_0} = 2 \Leftrightarrow \frac{L}{L_0} = 10^2 \Leftrightarrow L = 100L_0.$$

Άρα, ένας αστέρας 1ου μεγέθους είναι 100 φορές λαμπρότερος από έναν αστέρα 6ου μεγέθους.

8. i. Επειδή S(1) = 15 (χιλιάδες μονάδες), έχουμε:

$$15 = 100\left(1 - e^{\kappa}\right) \Leftrightarrow 0,15 = 1 - e^{\kappa} \Leftrightarrow e^{\kappa} = 0,85 \Leftrightarrow \kappa = \ln 0,85 \cong -0,16.$$

Επομένως $S(t) = 100\left(1 - e^{-0,16t}\right)$, (1).

ii. Οι πωλήσεις (σε χιλιάδες μονάδες) μετά από 5 χρόνια, σύμφωνα με τον τύπο (1), θα είναι:

$$S(5) = 100 \cdot \left(1 - e^{-0,16 \cdot 5}\right) = 100 \cdot \left(1 - e^{-0,8}\right) = 100 \cdot (1 - 0,4493) = 100 \cdot 0,5507 = 55,07.$$

Άρα, οι πωλήσεις κατά τα 5 πρώτα χρόνια ανέρχονται σε 55070 μονάδες.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i. $$4^{1-\frac{1}{2}\log_2 3} = \left(2^2\right)^{1-\frac{1}{2}\log_2 3} = 2^{2-\log_2 3} = 2^{\log_2 4 - \log_2 3} = 2^{\log_2 \frac{4}{3}} = \frac{4}{3}.$$

ii. $$9^{\frac{1}{2}\log_3 18 - 1} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{2}\log_3 18 - 1} = 3^{\log_3 18 - 2} = 3^{\log_3 18 - \log_3 9} = 3^{\log_3 \frac{18}{9}} = 3^{\log_3 2} = 2.$$

2. Επειδή οι $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, θα υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$\theta_{\nu+1} = \lambda\theta_\nu, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*$$

οπότε:

$$\log\theta_{\nu+1} = \log(\lambda\theta_\nu), \text{ για κάθε } \nu\in\mathbb{N}^* \quad \text{ή}$$

$$\log\theta_{\nu+1} = \log\theta_\nu + \log\lambda, \text{ για κάθε } \nu\in\mathbb{N}^*,$$

που σημαίνει ότι οι $\log\theta_1, \log\theta_2, \log\theta_3, \ldots$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, με διαφορά $\omega = \log\lambda$.

3. Επειδή $\alpha_1 = \log 2$ και $\alpha_2 = \log 8$, η διαφορά της προόδου θα είναι ίση με:

$$\omega = \log 8 - \log 2 = \log 4 = 2\log 2.$$

Επομένως, λόγω του τύπου $\Sigma_\nu = \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\cdot\nu}{2}$, έχουμε:

$$\Sigma_\nu = \frac{[2\log 2 + (\nu-1)\cdot 2\log 2]\cdot\nu}{2} = \frac{(2\nu\cdot\log 2)\cdot\nu}{2} = \nu^2\cdot\log 2.$$

4. $$\log\left(\log\underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\ldots\sqrt[10]{10}}}}}_{\nu \text{ ριζικά}}\right) = \log\left(\log\sqrt[10^\nu]{10}\right) = \log\left(\frac{1}{10^\nu}\right) = \log 10^{-\nu} = -\nu.$$

5. $$\log\left(1-\frac{1}{2}\right) + \log\left(1-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \log\left(1-\frac{1}{\nu}\right) = \log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \ldots + \log\frac{\nu-1}{\nu}$$

$$= \log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{\nu-1}{\nu}\right) = \log\frac{1}{\nu} = -\log\nu.$$

6. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής βάσης, τότε βρίσκουμε:

$$\log_{\alpha^2} x^2 = \frac{\log_\alpha x^2}{\log_\alpha \alpha^2} = \frac{2\log_\alpha x}{2} = \log_\alpha x, \quad (\text{αφού } x > 0).$$

7. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής βάσης, βρίσκουμε:

i. $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\alpha = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha}\cdot\dfrac{\log\alpha}{\log\beta} = 1.$

ii. $\log_\alpha\beta^2\cdot\log_\beta\alpha^3 = 2\log_\alpha\beta\cdot 3\log_\beta\alpha = 6(\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\alpha) \overset{(i)}{=} 6.$

iii. $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\gamma\cdot\log_\gamma\alpha = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha}\cdot\dfrac{\log\gamma}{\log\beta}\cdot\dfrac{\log\alpha}{\log\gamma} = 1.$

8. Αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αλλαγής βάσης, βρίσκουμε:

i. $\log_\alpha \theta + \log_{\frac{1}{\alpha}} \theta = \dfrac{\log\theta}{\log\alpha} + \dfrac{\log\theta}{\log\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{\log\theta}{\log\alpha} + \dfrac{\log\theta}{-\log\alpha} = \dfrac{\log\theta}{\log\alpha} - \dfrac{\log\theta}{\log\alpha} = 0.$

ii. $\log_\alpha(\alpha\beta) + \log_\beta(\alpha\beta) = \dfrac{\log(\alpha\beta)}{\log\alpha} + \dfrac{\log(\alpha\beta)}{\log\beta} = \dfrac{\log(\alpha\beta)\cdot\log\beta + \log(\alpha\beta)\cdot\log\alpha}{\log\alpha\cdot\log\beta}$

$$= \frac{\log(\alpha\beta)\cdot[\log\beta + \log\alpha]}{\log\alpha\cdot\log\beta} = \frac{\log(\alpha\beta)\cdot\log(\alpha\beta)}{\log\alpha\cdot\log\beta}$$

$$= \frac{\log(\alpha\beta)}{\log\alpha}\cdot\frac{\log(\alpha\beta)}{\log\beta} = \log_\alpha(\alpha\beta)\cdot\log_\beta(\alpha\beta).$$

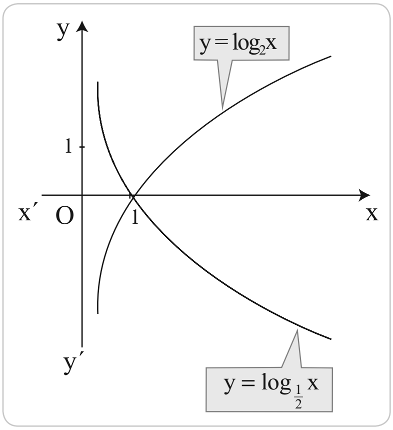
5.3 Λογαριθμική συνάρτηση

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

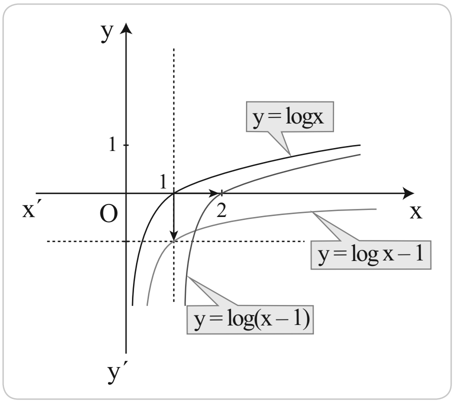
1. Για κάθε x > 0 ισχύει:

$$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x = -f(x).$$

Άρα, η γραφική παράσταση της g είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x′x.



2. Επειδή $g(x) = f(x) - 1$, η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.
Τέλος, επειδή $h(x) = f(x-1)$, η γραφική παράσταση της h προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



3. Επειδή $0<\alpha\neq 1$, έχουμε:

i. $f(2)=4 \Leftrightarrow \alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$. Άρα $f(x)=2^x$.

Επίσης $g(2)=4 \Leftrightarrow \log_\alpha 2=4 \Leftrightarrow \alpha^4=2 \Leftrightarrow \alpha=\sqrt[4]{2}$. Άρα $g(x)=\log_{\sqrt[4]{2}} x$.

ii. $f(-2)=4 \Leftrightarrow \alpha^{-2}=4 \Leftrightarrow \alpha^2=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{2}$. Άρα $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$,

ενώ δεν υπάρχει η g, αφού ο λογάριθμος αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται.

iii. $f(2)=-4 \Leftrightarrow \alpha^2=-4$, (αδύνατο)

$g(2)=-4 \Leftrightarrow \log_\alpha 2=-4 \Leftrightarrow \alpha^{-4}=2 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

iv. $f(-2)=-4 \Leftrightarrow \alpha^{-2}=-4 \Leftrightarrow \alpha^2=-\dfrac{1}{4}$, (αδύνατο).

Επίσης, δεν υπάρχει η g, αφού ο λογάριθμος αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται.

4. Για $x=50$, είναι $\log x=\log 50=\log\dfrac{100}{2}=\log 100-\log 2=2-\log 2\cong 1{,}7$

Άρα $y=1+10\cdot 1{,}7=18$.

Για $x=100$, είναι $\log x=\log 100=2$. Άρα $y=1+10\cdot 2=21$.

Για $x=200$, είναι $\log x=\log(100\cdot 2)=\log 100+\log 2=2+\log 2=2{,}3$.

Άρα $y=1+10\cdot 2{,}3=24$.

Για $x=400$, είναι $\log x=\log(100\cdot 4)=\log 100+\log 4=2+2\log 2=2{,}6$.

Άρα $y=1+10\cdot 2{,}6=27$.

Για $x=800$, είναι $\log x=\log(100\cdot 8)=\log 100+\log 8=2+3\log 2=2{,}9$.

Άρα $y=1+10\cdot 2{,}9=30$.

Για $x=1600$, είναι $\log x=\log(100\cdot 16)=\log 100+\log 16=2+4\log 2=3{,}2$.

Άρα $y=1+10\cdot 3{,}2=33$.

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	50	100	200	400	800	1600
y	18	21	24	27	30	33

Παρατηρούμε ότι:

- οι τιμές του x είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, με λόγο $\lambda=2$,
- ενώ οι τιμές του y είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, με διαφορά $\omega=3$.

5. i. Η εξίσωση ορίζεται αν $x+1>0$ και $x-1>0$, δηλαδή αν $x>1$.

Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log 2 \Leftrightarrow \log[(x+1)\cdot(x-1)]=\log 2$$
$$\Leftrightarrow \log(x^2-1)=\log 2 \Leftrightarrow x^2-1=2$$
$$\Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x=-\sqrt{3}.$$

Δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x=\sqrt{3}$.

ii. Η εξίσωση ορίζεται αν $x-1>0$ και $x>0$, δηλαδή αν $x>1$.

Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$\log(x-1)+\log x=1-\log 5 \Leftrightarrow \log[(x-1)\cdot x]=\log\frac{10}{5}$$
$$\Leftrightarrow \log(x^2-x)=\log 2 \Leftrightarrow x^2-x=2$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \quad \text{ή} \quad x=-1.$$

Δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x=2$.

iii. Η εξίσωση ορίζεται αν $x>0$. Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$\log x^2=(\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x=(\log x)^2 \Leftrightarrow \log x(\log x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow \log x=0 \quad \text{ή} \quad \log x=2$$
$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=100, \text{ (που είναι δεκτές).}$$

iv. Η εξίσωση ορίζεται αν $x>0$. Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$\frac{x^2+1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2+1=2x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1, \text{ (δεκτή).}$$

6. i. $$5^x=2^{1-x} \Leftrightarrow \log 5^x=\log 2^{1-x} \Leftrightarrow x\log 5=(1-x)\log 2 \Leftrightarrow x\log 5=\log 2-x\log 2$$
$$\Leftrightarrow x(\log 5+\log 2)=\log 2 \Leftrightarrow x\log 10=\log 2 \Leftrightarrow x=\log 2.$$

ii. $$3^{x-1}=2^{x+1} \Leftrightarrow \log 3^{x-1}=\log 2^{x+1} \Leftrightarrow (x-1)\log 3=(x+1)\log 2$$
$$\Leftrightarrow x\log 3-x\log 2=\log 3+\log 2$$
$$\Leftrightarrow (\log 3-\log 2)x=\log 3+\log 2$$
$$\Leftrightarrow (\log 1,5)x=\log 6$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\log 6}{\log 1,5}.$$

7. **i.** Είναι 2 < 5. Επομένως $\log_3 2 < \log_3 5$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \log_3 x$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι 5 < 7. Επομένως $\log_{0,3} 5 > \log_{0,3} 7$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \log_{0,3} x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Είναι $x^2 + 1 \geq 2x$, αφού $x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Επομένως $\log(x^2 + 1) \geq \log 2x$, αφού η συνάρτηση $f(x) = \log x$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα.

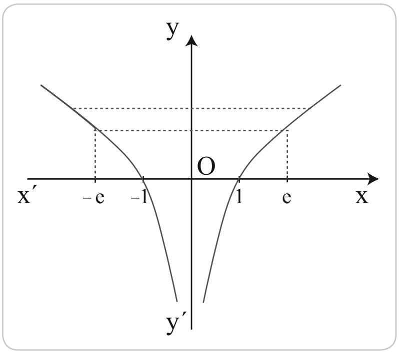
8. Είναι $[H^+] > 10^{-7} \Leftrightarrow \log[H^+] > \log 10^{-7} \Leftrightarrow \log[H^+] > -7 \Leftrightarrow -\log[H^+] < 7 \Leftrightarrow pH < 7$.

Άρα, ένα διάλυμα είναι όξινο αν έχει pH < 7, ενώ είναι βασικό αν έχει pH > 7.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. **i.** Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$.

Επειδή $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$, για κάθε $x \neq 0$, η συνάρτηση f είναι άρτια. Άρα, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y. Επομένως, αποτελείται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = \ln|x|$, $x > 0$, και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα y′y. Επειδή x > 0, είναι $g(x) = \ln x$ και επομένως, η γραφική παράσταση της f δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



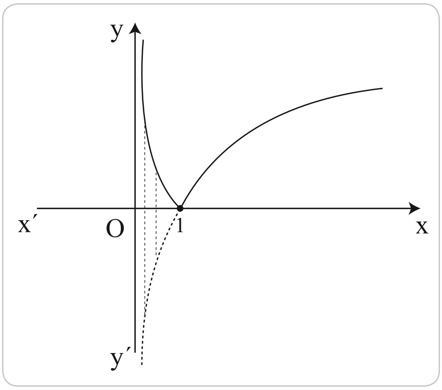
ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$ ορίζεται για κάθε $x \neq 0$.

Επειδή $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2 = \ln\sqrt{x^2} = \ln|x|$, για κάθε $x \neq 0$,

η γραφική της παράσταση είναι η προηγούμενη.

iii. Η συνάρτηση $f(x)=|\ln x|$ ορίζεται για κάθε $x>0$.

Επειδή $f(x)=\begin{cases}-\ln x\ , & x<1\\ \ln x\ , & x\geq 1\end{cases}$, η γραφική της παράσταση δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

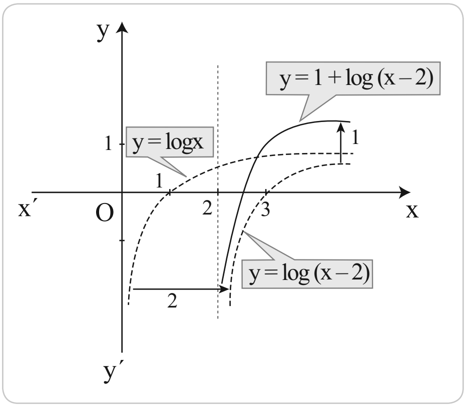


iv. Η συνάρτηση $f(x)=\log(10x-20)$ ορίζεται για κάθε $x\in(2,+\infty)$.

Επειδή $f(x)=\log[10(x-2)]=\log 10+\log(x-2)=1+\log(x-2)$, αν θέσουμε $g(x)=\log x$, τότε έχουμε:

$$f(x)=1+g(x-2).$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f προκύπτει αν τη γραφική παράσταση της $g(x)=\log x$ τη μετατοπίσουμε πρώτα κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και έπειτα κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



2. i. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2+1>x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>|x|\geq -x,\ \text{άρα}\ \sqrt{x^2+1}+x>0.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \ln\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = -f(x).$$

Άρα, η f είναι περιττή συνάρτηση.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ ορίζεται για κάθε $x\in(-1,\,1)$, γιατί:

$$\frac{1-x}{1+x}>0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)<0 \Leftrightarrow -1<x<1.$$

Για κάθε $x\in(-1,\,1)$, ισχύει:

$$f(-x)=\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\ln\frac{1+x}{1-x}=-\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x).$$

Άρα, η f είναι περιττή συνάρτηση.

3. Οι αριθμοί $\log 178$, $\log\sqrt{81\cdot\left(2^x+2\cdot 3^x\right)}$ και $x\log 3$ με τη σειρά που δόθηκαν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν:

$$2\log\sqrt{81\cdot\left(2^x+2\cdot 3^x\right)}=\log 178+x\log 3 \Leftrightarrow \log\left[81\cdot\left(2^x+2\cdot 3^x\right)\right]=\log\left(178\cdot 3^x\right)$$

$$\Leftrightarrow 81\cdot\left(2^x+2\cdot 3^x\right)=178\cdot 3^x \Leftrightarrow 81\cdot 2^x=16\cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{16}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^4 \Leftrightarrow x=4.$$

4. $$\log_\alpha\beta=\log_\beta\gamma\cdot\log_\gamma\alpha \Leftrightarrow \frac{\log\beta}{\log\alpha}=\frac{\log\gamma}{\log\beta}\cdot\frac{\log\alpha}{\log\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log\beta}{\log\alpha}=\frac{\log\alpha}{\log\beta}$$

$$\Leftrightarrow (\log\alpha)^2=(\log\beta)^2$$

$$\Leftrightarrow (\log\alpha=\log\beta \quad \text{ή} \quad \log\alpha=-\log\beta)$$

$$\Leftrightarrow (\log\alpha=\log\beta \quad \text{ή} \quad \log\alpha=\log\frac{1}{\beta})$$

$$\Leftrightarrow (\alpha=\beta \quad \text{ή} \quad \alpha=\frac{1}{\beta}).$$

5. i. Η εξίσωση $\log\sqrt{x}=\sqrt{\log x}$ ορίζεται εφόσον $x>0$ και $\log x \geq 0$, δηλαδή εφόσον $x \geq 1$.

Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$\log\sqrt{x}=\sqrt{\log x} \Leftrightarrow \left(\log\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{\log x}\right)^2 \quad (\text{αφού } \log\sqrt{x},\ \sqrt{\log x}\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\log x\right)^2=\log x \Leftrightarrow \frac{1}{4}\log^2 x=\log x$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x-4\log x=0 \Leftrightarrow \log x\cdot(\log x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \log x=0 \quad \text{ή} \quad \log x=4$$

$$\Leftrightarrow (x=1 \quad \text{ή} \quad x=10.000).$$

ii. Θέτουμε $w=\ln^2 x$, $x>0$, οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$w^2-5w+4=0 \Leftrightarrow (w=1 \quad \text{ή} \quad w=4).$$

Επομένως:

- αν $w=1$, τότε $\ln^2 x=1 \Leftrightarrow \ln x=\pm 1 \Leftrightarrow x=e$ ή $x=\frac{1}{e}$,
- αν $w=4$, τότε $\ln^2 x=4 \Leftrightarrow \ln x=\pm 2 \Leftrightarrow x=e^2$ ή $x=\frac{1}{e^2}$.

Άρα, η εξίσωση έχει ως λύσεις τους αριθμούς e, $\frac{1}{e}$, e^2 και $\frac{1}{e^2}$.

6. Έχουμε:

$$x^{\log 5}=5^{\log x} \Leftrightarrow \log x^{\log 5}=\log 5^{\log x} \Leftrightarrow \log 5\cdot\log x=\log x\cdot\log 5, \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως, αν θέσουμε $5^{\log x}=x^{\log 5}=t$, (1), η εξίσωση $5^{2\log x}=5+4\cdot x^{\log 5}$ γράφεται:

$$t^2=5+4t \Leftrightarrow t^2-4t-5=0 \Leftrightarrow t=5 \quad \text{ή} \quad t=-1.$$

- Για $t=5$, η εξίσωση (1) γράφεται:

$$5^{\log x}=5 \Leftrightarrow \log x=1 \Leftrightarrow x=10.$$

- Για $t=-1$, η εξίσωση (1) γράφεται:

$$5^{\log x}=-1, \text{ που είναι αδύνατη.}$$

7. i. Το σύστημα ορίζεται εφόσον $x>0$ και $y>0$. Για αυτά τα x, y, έχουμε:

$$\begin{cases}\log(xy)=4\log 2\\ \log x\cdot\log y=3(\log 2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log x+\log y=4\log 2\\ \log x\cdot\log y=3(\log 2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log x=\log 2\\ \log y=3\log 2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\log x=3\log 2\\ \log y=\log 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=8\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}x=8\\ y=2\end{cases}.$$

ii. Το σύστημα ορίζεται εφόσον x, y > 0. Για αυτά τα x, y, έχουμε:

$$\begin{cases} xy = 8 \\ \log y = 2\log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ \log y = \log x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}.$$

iii. Το σύστημα ορίζεται εφόσον x, y > 0. Για αυτά τα x, y, έχουμε:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2\log y = \log x + \log 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \log y^2 = \log 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y^2 = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 1, \text{ αφού } \ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}.$$

8. i. Η ανίσωση ορίζεται εφόσον x > 0. Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$\log x^2 > (\log x)^2 \Leftrightarrow 2\log x > (\log x)^2 \Leftrightarrow \log x(2 - \log x) > 0$$
$$\Leftrightarrow \log x(\log x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < \log x < 2$$
$$\Leftrightarrow \log 1 < \log x < \log 100$$
$$\Leftrightarrow 1 < x < 100.$$

αφού η $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Η ανίσωση ορίζεται εφόσον $x^2 - 4 > 0$ και 3x > 0, δηλαδή εφόσον x > 2.
Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$\log(x^2 - 4) < \log 3x \Leftrightarrow x^2 - 4 < 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4.$$

Επομένως, η ανίσωση αληθεύει αν 2 < x < 4, επειδή x > 2.

iii. Η ανίσωση ορίζεται εφόσον x > 0. Με τον περιορισμό αυτόν έχουμε:

$$x^{\log x} > 10 \ \Leftrightarrow \log\left(x^{\log x}\right) > \log 10 \Leftrightarrow \log x \cdot \log x > 1$$
$$\Leftrightarrow (\log x)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\log x + 1)(\log x - 1) > 0$$
$$\Leftrightarrow \log x < -1 \quad \text{ή} \quad \log x > 1$$
$$\Leftrightarrow 0 < x < 0{,}1 \quad \text{ή} \quad x > 10.$$

9. $\log_2 3 > \log_6 9 \Leftrightarrow \dfrac{\log 3}{\log 2} > \dfrac{\log 9}{\log 6} \Leftrightarrow \log 3 \cdot \log 6 > \log 2 \cdot \log 9$

$$\Leftrightarrow \log 3 \cdot \log(2 \cdot 3) > \log 2 \cdot \log 3^2$$
$$\Leftrightarrow \log 3 \cdot (\log 2 + \log 3) > \log 2 \cdot 2 \cdot \log 3$$
$$\Leftrightarrow \log 2 + \log 3 > 2\log 2$$
$$\Leftrightarrow \log 3 > \log 2, \text{ που ισχύει.}$$

10. $\alpha^{\alpha}\beta^{\beta} > \alpha^{\beta}\beta^{\alpha} \Leftrightarrow \log\left(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\right) > \log\left(\alpha^{\beta}\beta^{\alpha}\right) \Leftrightarrow \alpha\log\alpha + \beta\log\beta > \beta\log\alpha + \alpha\log\beta$

$$\Leftrightarrow \alpha(\log\alpha - \log\beta) - \beta(\log\alpha - \log\beta) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)\cdot(\log\alpha - \log\beta) > 0,\ (1).$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα:

- αν $\alpha > \beta$, τότε θα είναι και $\log\alpha > \log\beta$, οπότε η σχέση (1) ισχύει,
- ενώ αν $\alpha < \beta$, τότε θα είναι και $\log\alpha < \log\beta$, οπότε η σχέση (1) ισχύει.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. i. Η εξίσωση αυτή αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$x^2 - 3x + 1 = 1, \quad (1) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3x - 5 = 0 \\ \text{και} \\ 3x^2 - 3x + 1 \neq 0 \end{cases}, (2) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x^2 - 3x + 1 = -1 \\ \text{και} \\ 3x - 5 \ \text{άρτιος} \end{cases}, (3).$$

Έχουμε λοιπόν:

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 3.$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ \text{και} \\ x^2 - 3x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}, \ \text{αφού} \ \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = -\frac{11}{9} \neq 0$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \text{ή} \ x = 2 \\ \text{και} \\ 3x - 5 \ \text{άρτιος ακέραιος} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,$$

αφού για $x = 1$ είναι $3x - 5 = -2$ άρτιος ενώ για $x = 2$ είναι $3x - 5 = 1$ περιττός.

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $0, 3, \dfrac{5}{3}, 1$.

ii. Είναι:

$$x^{x^2+3x+1} = x \Leftrightarrow x^{x^2+3x+1} - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^{x^2+3x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^{x^2+3x} = 1, \ (4).$$

Η σχέση (4) αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει:

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x^2 + 3x = 0 \\ \text{και} \\ x \neq 0 \end{cases}, (5) \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = -1 \\ \text{και} \\ x^2 + 3x, \ \text{άρτιος} \end{cases}, (6).$$

Έχουμε λοιπόν:

$(5) \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0, \quad \text{άρα} \quad x = -3$

$(6) \Leftrightarrow x = -1$, αφού για $x = -1$ είναι $(-1)^2 + 3 \cdot (-1) = -2$ άρτιος.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί: $0, \ 1, \ -3, \ -1$.

2. • Αν $\gamma = 1$ προφανώς ισχύει η ισότητα

• Αν $\gamma \neq 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{\log_\gamma(\alpha+\beta)} + \frac{1}{\log_\gamma(\alpha-\beta)} = 2\cdot\frac{1}{\log_\gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{\log_\gamma(\alpha-\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_\gamma(\alpha-\beta)+\log_\gamma(\alpha+\beta)=2$$

$$\Leftrightarrow \log_\gamma(\alpha^2-\beta^2)=2 \quad [\text{αφού } \alpha^2-\beta^2=\gamma^2]$$

$$\Leftrightarrow \log_\gamma \gamma^2 = 2, \text{ που ισχύει.}$$

3. • Αν $\theta = 1$ προφανώς ισχύει το συμπέρασμα

• Αν $\theta \neq 1$, έχουμε διαδοχικά:

$$(\alpha\gamma)^{\mathrm{bg}_\alpha\beta} = \gamma^2 \Leftrightarrow \log_\theta(\alpha\gamma)^{\mathrm{bg}_\alpha\beta} = \log_\theta \gamma^2$$

και τελικά καταλήγουμε στη σχέση

$$\log_\gamma\theta + \log_\alpha\theta = 2\log_\beta\theta,$$

που σημαίνει ότι οι αριθμοί $\log_\alpha\theta,\ \log_\beta\theta,\ \log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

4. Α΄ μέλος: $$\frac{\log_\alpha\theta-\log_\beta\theta}{\log_\beta\theta-\log_\gamma\theta} = \frac{\dfrac{1}{\log_\theta\alpha}-\dfrac{1}{\log_\theta\beta}}{\dfrac{1}{\log_\theta\beta}-\dfrac{1}{\log_\theta\gamma}} = \frac{\dfrac{\log_\theta\beta-\log_\theta\alpha}{\log_\theta\alpha\cdot\log_\theta\beta}}{\dfrac{\log_\theta\gamma-\log_\theta\beta}{\log_\theta\beta\cdot\log_\theta\gamma}}$$

$$=\frac{\log_\theta\gamma\cdot\log_\theta\beta-\log_\theta\alpha)}{\log_\theta\alpha\cdot\log_\theta\gamma-\log_\theta\beta)}$$

$$=\frac{\log_\theta\gamma\cdot\log_\theta\dfrac{\beta}{\alpha}}{\log_\theta\alpha\cdot\log_\theta\dfrac{\gamma}{\beta}} = \frac{\log_\theta\gamma}{\log_\theta\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\log_\gamma\theta}}{\dfrac{1}{\log_\alpha\theta}} = \frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta}$$

Ισχύει $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\gamma}{\beta}$, άρα:

$$\log\frac{\alpha}{\beta}=\log\frac{\gamma}{\beta}.$$

5. Είναι $\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2.$

Η εξίσωση $x^{\log(2x)} = 5$ ορίζεται εφόσον x > 0. Με τον περιορισμό αυτό έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
x^{\log(2x)} = 5 &\Leftrightarrow \log\left(x^{\log(2x)}\right) = \log 5\\
&\Leftrightarrow \log(2x)\cdot\log x = \log 5\\
&\Leftrightarrow (\log 2 + \log x)\cdot\log x = 1 - \log 2\\
&\Leftrightarrow (\log x)^2 + \log 2\cdot\log x - (1 - \log 2) = 0\\
&\Leftrightarrow (\log x)^2 - 1 + \log 2\cdot\log x + \log 2 = 0\\
&\Leftrightarrow (\log x - 1)\cdot(\log x + 1) + \log 2\cdot(\log x + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (\log x + 1)\cdot(\log x + \log 2 - 1) = 0\\
&\Leftrightarrow (\log x + 1)\cdot(\log x + \log\frac{1}{5}) = 0\\
&\Leftrightarrow (\log x = -1 \quad ή \quad \log x = -\log\frac{1}{5}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{10} \quad ή \quad x = 5.
\end{aligned}$$

6. $$\log_{ημx} 2 + \log_{συνx} 2 + \log_{ημx} 2\cdot\log_{συνx} 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(ημx)} + \frac{1}{\log_2(συνx)} + \frac{1}{\log_2(ημx)}\cdot\frac{1}{\log_2(συνx)} = 0\\
&\Leftrightarrow \log_2(συνx) + \log_2(ημx) + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow \log_2(συνx) + \log_2(ημx) + \log_2 2 = 0\\
&\Leftrightarrow \log_2(2ημxσυνx) = 0\\
&\Leftrightarrow \log_2(2ημx) = 0 \Leftrightarrow ημ2x = 1\\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \quad [\text{αφού } 0 < 2x < \pi]\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}
(εφx)^{ημx} = (σφx)^{συνx} &\Leftrightarrow (εφx)^{ημx} = \frac{1}{(εφx)^{συνx}} \Leftrightarrow (εφx)^{ημx+συνx} = 1\\
&\Leftrightarrow εφx = 1 \ [\text{αφού } ημx + συνx > 0]\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad [\text{αφού } 0 < x < \frac{\pi}{2}].
\end{aligned}$$

8. i. Έχουμε διαδοχικά:

$$27^x + 12^x - 2\cdot 8^x > 0 \Leftrightarrow 3^{3x} + 2^{2x}\cdot 3^x - 2\cdot 2^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{x} - 2 > 0, \ (1).$$

Αν τώρα θέσουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = t$, τότε η ανίσωση (1) γράφεται διαδοχικά:

$t^3 + t - 2 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2) > 0$ [Με σχήμα Horner]

$\Leftrightarrow t - 1 > 0$ [αφού $t^2 + t + 2 > 0$]

$\Leftrightarrow t > 1.$

Άρα, λόγω του μετασχηματισμού $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = t$, έχουμε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{0} \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ (Δ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. $\eta\mu^2 x - 2\sqrt{3}\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2} - \sqrt{3}\eta\mu 2x - \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu 2x - 2\sqrt{3}\eta\mu 2x - 1 - \sigma\upsilon\nu 2x = -2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\eta\mu 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \acute{\eta} \quad 2x + \frac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12} \quad \acute{\eta} \quad x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

2. i. Όπως είναι γνωστό η παράσταση αημx + βσυνx παίρνει τη μορφή:

$$\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x = \gamma \Leftrightarrow \rho \cdot \eta\mu(x+\varphi) = \gamma \Leftrightarrow \eta\mu(x+\varphi) = \frac{\gamma}{\rho},$$

όπου $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$, $\beta = \rho \cdot \eta\mu\varphi$.

Αλλά η εξίσωση αυτή, άρα και η αρχική, έχει λύση αν και μόνο αν:

$$\left|\frac{\gamma}{\rho}\right| \le 1 \Leftrightarrow |\gamma| \le |\rho| \Leftrightarrow \gamma^2 \le \rho^2 \Leftrightarrow \gamma^2 \le \alpha^2 + \beta^2.$$

ii. Σύμφωνα με το ερώτημα (i) η εξίσωση αυτή έχει λύση μόνο αν

$$(1 + \sigma\upsilon\nu t)^2 + \eta\mu^2 t \ge 2^2 \Leftrightarrow 2(1 + \sigma\upsilon\nu t) \ge 4 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2} \ge 4 \Leftrightarrow \ge \sigma\upsilon\nu^2\frac{t}{2} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}\right| \ge 1 \Leftrightarrow \left|\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{t}{2} = 1 \Leftrightarrow t = 0 \quad (\text{αφού } -\frac{\pi}{2} < \frac{t}{2} < \frac{\pi}{2})$$

Για την τιμή αυτή του t η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$(1 + \sigma\upsilon\nu 0) \cdot \eta\mu x + \eta\mu 0 \cdot \sigma\upsilon\nu x = 2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

3. • $$εφ3α = εφ(2α+α)\frac{εφ2α+εφα}{1-εφ2α\cdotεφα} = \frac{\frac{2εφα}{1-εφ^2α}+εφα}{1-\frac{2εφα}{1-εφ^2α}\cdotεφα} = \frac{3εφα-εφ^3α}{1-3εφ^2α}.$$

• Αν τώρα αντικαταστήσουμε το α με $\frac{π}{12}$, τότε έχουμε:

$$εφ\frac{π}{4} = \frac{3εφ\frac{π}{12}-εφ^3\frac{π}{12}}{1-3εφ^2\frac{π}{12}} \Leftrightarrow 1 = \frac{3εφ\frac{π}{12}-εφ^3\frac{π}{12}}{1-3εφ^2\frac{π}{12}}$$

$$\Leftrightarrow εφ^3\frac{π}{12}-3εφ^2\frac{π}{12}-3εφ\frac{π}{12}+1=0,$$

που σημαίνει ότι η εφ $\frac{π}{12}$ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$x^3 – 3x^2 – 3x + 1 = 0.$$

• Η εξίσωση αυτή λύνεται ως εξής:

$$x^3 – 3x^2 – 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 1) – 3x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 – x + 1) – 3x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 – 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = –1 \quad ή \quad x = 2 – \sqrt{3} \quad ή \quad x = 2 + \sqrt{3}$$

Επειδή εφ $\frac{π}{12} < 1$ θα είναι εφ $\frac{π}{12} = 2-\sqrt{3}$.

4. Ο αριθμός «αβγδ» γράφεται:

$$«αβγδ» = α10^3 + β10^2 + γ10 + δ.$$

Έστω το πολυώνυμο $f(x) = αx^3 + βx^2 + γ + δ$. Τότε θα είναι:

$$f(10) = «αβγδ» \text{ και } f(1) = α + β + γ + δ.$$

Είναι γνωστό ότι $f(x) = (x – 1)π(x) + f(1)$, οπότε, για $x = 10$, έχουμε

$$f(10) = (10 – 1)Π(10) + f(1) \quad ή \quad «αβγδ» = 9 \cdot Π(10) + (α + β + γ + δ).$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει αμέσως ότι, αν α + β + γ + δ είναι πολλαπλάσιο του 9, τότε και ο αριθμός «αβγδ» είναι πολλαπλάσιο του 9 και αντιστρόφως, πράγμα που αποδεικνύει τον κανόνα.

5. i. • Οι διαιρέτες του 1 είναι ±1, ενώ του 2 είναι ±1, ±2, οπότε οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι ±1, $\pm\frac{1}{2}$.

Αν θέσουμε $P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, τότε με το σχήμα Horner για $\rho = 1$, $\rho = -1$ βρίσκουμε $P(1) = 3 \neq 0$, $P(-1) = -3 \neq 0$, ενώ για $\rho = \frac{1}{2}$ έχουμε:

2	1	1	–1	$\rho = \frac{1}{2}$
	1	1	1	
2	2	2	0	

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 2x + 2\right) = 0 \quad ή \quad (2x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

και έχει ρίζα το $x = \frac{1}{2}$ μόνο.

• Οι διαιρέτες του 1 είναι ±1, ενώ του 6 είναι ±1, ±2, ±3, ±6, οπότε οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι ±1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$.

Επειδή όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι θετικοί δοκιμάζουμε μόνο τους αριθμούς -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$.

Αν θέσουμε $P(x) = 6x^4 + 29x^3 + 27x^2 + 9x + 1$, με το σχήμα Horner για $\rho = -1$ βρίσκουμε $P(-1) = -4 \neq 0$, ενώ για $\rho = -\frac{1}{2}$ έχουμε:

6	29	27	9	1	$\rho = -\frac{1}{2}$
	–3	–13	–7	–1	
6	26	14	2	0	

οπότε $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(6x^3 + 26x^2 + 14x + 2) = (2x + 1)(3x^3 + 13x^2 + 7x + 1)$.

Αν εργασθούμε ανάλογα με το $\Pi(x) = 3x^3 + 13x^2 + 7x + 1$ για $\rho = -\frac{1}{3}$ έχουμε:

3	13	7	1	$\rho = -\frac{1}{3}$
	–1	–4	–1	
3	12	3	0	

οπότε $\Pi(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 12x + 3) = (3x + 1)(x^2 + 4x + 1)$.

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$(2x + 1)(3x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 0$$

και έχει ρίζες $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = -2 - \sqrt{3}$ και $x_4 = -2 + \sqrt{3}$.

ii. Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$. Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι αυτή δεν έχει ρητές ρίζες. Οι πιθανές ρητές ρίζες αυτής είναι ± 1, ± 2. Όμως καμία από αυτές δεν επαληθεύει την εξίσωση, οπότε η εξίσωση δεν έχει ρητές ρίζες. Αυτό σημαίνει ότι ο $\sqrt{2}$ που είναι ρίζα της, δεν είναι ρητός.

Η απόδειξη για το $\sqrt{12}$ είναι ανάλογη.

6. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι x = 2, που είναι και μοναδική. Πράγματι, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^x, \ (1).$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως:

- Αν $x < 2$, τότε $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 > \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$, ενώ $\left(\frac{5}{4}\right)^x < \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

  Άρα $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 > \left(\frac{5}{4}\right)^x$ και επομένως δεν υπάρχει ρίζα της (1) μικρότερη του 2.

- Αν $x > 2$, τότε $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$, ενώ $\left(\frac{5}{4}\right)^x < \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

  Άρα $\left(\frac{3}{4}\right)^x + 1 < \left(\frac{5}{4}\right)^x$ και επομένως δεν υπάρχει ρίζα της (1) μεγαλύτερη του 2.

Επομένως η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι **x = 2**.

7. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι $\mathbf{x = 1}$. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3}$ είναι **γνησίως φθίνουσα**, ενώ η $g(x) = 2^x$ είναι **γνησίως αύξουσα**, αν εργασθούμε όπως στην προηγούμενη άσκηση αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη λύση.

8. Η εξίσωση ορίζεται εφόσον $x + 3 > 0$ και $\alpha x > 0$.
Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\begin{aligned} 2\log(x+3) = \log(\alpha x) &\Leftrightarrow \log(x+3)^2 = \log(\alpha x) \\ &\Leftrightarrow (x+3)^2 = \alpha x \\ &\Leftrightarrow x^2 - (\alpha - 6)x + 9 = 0, \quad (1). \end{aligned}$$

Η διακρίνουσα της (1) ισούται με $\Delta = (\alpha - 6)^2 - 36 = \alpha^2 - 12\alpha = \alpha(\alpha - 12)$ και το πρόσημό της περιγράφεται από τον επόμενο πίνακα:

α	$-\infty$		0		12		$+\infty$
Δ		+	0	−	0	+	

Επομένως:

- Αν $\alpha < 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες αρνητικές, αφού:

$$x_1 \cdot x_2 = 9 > 0 \quad \text{και} \quad x_1 + x_2 = \alpha - 6 < 0.$$

  Επειδή για το τριώνυμο $f(x) = x^2 - (\alpha - 6)x + 9$ ισχύει:

$$f(-3) = (-3)^2 - (\alpha - 6)(-3) + 9 = 3(\alpha - 6) < 0,$$

  το -3 θα βρίσκεται μεταξύ των ριζών x_1, x_2 της (1). Επομένως θα ισχύει:

$$x_1 < -3 < x_2 < 0.$$

  Επειδή όμως $\alpha < 0$, η αρχική εξίσωση ορίζεται εφόσον $-3 < x < 0$. Επομένως από τις παραπάνω ρίζες x_1, x_2 δεκτή είναι μόνο μια, η x_2.
  Άρα για $\alpha < 0$ η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.
- Αν $\mathbf{\alpha = 0}$, δεν ορίζεται ο $\log(\alpha x)$.
- Αν $\mathbf{0 < \alpha < 12}$, η εξίσωση (1), άρα και η αρχική, είναι αδύνατη.
- Αν $\mathbf{\alpha = 12}$, η εξίσωση (1) έχει ακριβώς μία ρίζα, την $x = 3$, που είναι και ρίζα της αρχικής.
- Τέλος αν $\mathbf{\alpha > 12}$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες θετικές, αφού:

$$x_1 \cdot x_2 = 9 > 0 \quad \text{και} \quad x_1 + x_2 = \alpha - 6 < 0.$$

Επειδή όμως $\alpha > 12$, η αρχική εξίσωση ορίζεται εφόσον $x > 0$. Επομένως και οι δύο ρίζες x_1, x_2 της (1) είναι δεκτές. Άρα για $\alpha > 12$ η αρχική εξίσωση έχει δύο ρίζες.

Αν τώρα λάβουμε υπόψη όλα τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση μόνο αν $\alpha < 0$ ή $\alpha = 12$.

9. Μία προφανής λύση της εξίσωσης είναι $x = \frac{\pi}{4}$. Για να αποδείξουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική εργαζόμαστε ως εξής:

Η εξίσωση γράφεται:

$$\log_{\frac{\pi}{4}} x = 2 - \sigma\varphi x.$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ είναι **γνησίως φθίνουσα**, ενώ η $g(x) = 2 - \sigma\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi)$. Επομένως:

- Αν $x < \frac{\pi}{4}$, τότε $\log_{\frac{\pi}{4}} x > \log_{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} = 1$, ενώ $2 - \sigma\varphi x < 2 - \sigma\varphi \frac{\pi}{4} = 1$.

  Άρα $\log_{\frac{\pi}{4}} x > 2 - \sigma\varphi x$ και επομένως η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

- Αν $x > \frac{\pi}{4}$, τότε $\log_{\frac{\pi}{4}} x < \log_{\frac{\pi}{4}} \frac{\pi}{4} = 1$, ενώ $2 - \sigma\varphi x > 2 - \sigma\varphi \frac{\pi}{4} = 1$.

  Άρα $\log_{\frac{\pi}{4}} x < 2 - \sigma\varphi x$ και επομένως η εξίσωση (1) δεν έχει λύση στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$.

Επομένως, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι $x = \frac{\pi}{4}$.

10. Η ανίσωση ορίζεται εφόσον:

$$16^x - 2\cdot 12^x > 0 \Leftrightarrow 16^x > 2\cdot 12^x \Leftrightarrow \left(\frac{16}{12}\right)^x > 2 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x > 2, \ (1).$$

Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned}
\log_3\left(16^x - 2\cdot 12^x\right) \le 2x+1 &\Leftrightarrow \log_3\left(16^x - 2\cdot 12^x\right) \le \log_3 3^{2x+1} \\
&\Leftrightarrow 16^x - 2\cdot 12^x \le 3^{2x+1} \\
&\Leftrightarrow 4^{2x} - 2\cdot 3^x\cdot 4^x \le 3\cdot 3^{2x} \quad [\text{διαιρούμε με } 3^{2x}] \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 \le 0, \ (2).
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$, τότε η (2) γράφεται:

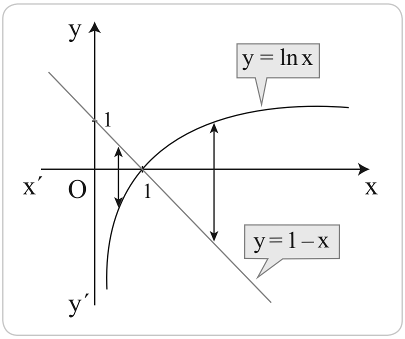
$$t^2 - 2t - 3 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 3.$$

Επομένως, λόγω του μετασχηματισμού $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$, και λόγω της (1), έχουμε:

$$2 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \le 3 \Leftrightarrow \log 2 < x \log\frac{4}{3} \le \log 3 \Leftrightarrow \log 2 < x\left(\log 4 - \log 3\right) \le \log 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log 2}{\log 4 - \log 3} < x \le \frac{\log 3}{\log 4 - \log 3}.$$

11. i. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δίνονται στο διπλανό σχήμα.

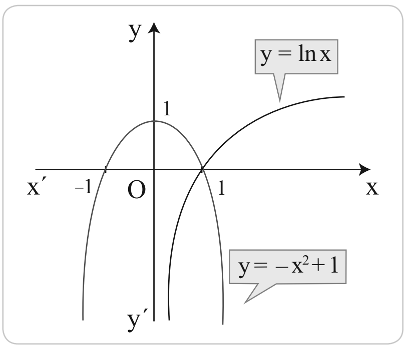


Η ανίσωση $\ln x \le 1 - x$, που ορίζεται εφόσον $x > 0$, αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει $f(x) \le g(x)$. Όπως φαίνεται στο σχήμα, αυτό συμβαίνει αν $0 < x \le 1$ και αποδεικνύεται ως εξής:

- Αν $0 < x \le 1$, τότε $\ln x \le 0$ και $1 - x \ge 0$, οπότε $\ln x \le 1 - x$.
- Αν $x > 1$, τότε $\ln x > 0$ και $1 - x < 0$, οπότε $\ln x > 1 - x$.

Επομένως, η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (0, 1]$.

ii. Αν εργασθούμε όπως στο **i.** ερώτημα βρίσκουμε ότι η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [1, +\infty)$.



12. Αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\lambda$, έχουμε $\alpha=\lambda\cdot\eta\mu A$, $\beta=\lambda\cdot\eta\mu B$ και $\gamma=\lambda\cdot\eta\mu\Gamma$.

Επομένως:

$$\begin{aligned}\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A &= \lambda^2\eta\mu^2 B+\lambda^2\eta\mu^2\Gamma-2\lambda\eta\mu B\cdot\lambda\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A\\ &=\lambda^2(\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma-2\eta\mu B\cdot\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A)\\ &=\lambda^2[\eta\mu^2 B+\eta\mu^2\Gamma+2\eta\mu B\cdot\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)] \quad (\text{αφού } A+B+\Gamma=\pi)\\ &=\ldots=\alpha^2.\end{aligned}$$

13. Αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha<\beta+\gamma$ και $\beta<\alpha+\gamma$ και $\gamma<\alpha+\beta$.

Αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\lambda$ έχουμε:

$$\alpha=\lambda\cdot\eta\mu A,\quad \beta=\lambda\cdot\eta\mu B \quad\text{και}\quad \gamma=\lambda\cdot\eta\mu\Gamma.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\alpha<\beta+\gamma &\Leftrightarrow \lambda\cdot\eta\mu A<\lambda\cdot\eta\mu B+\lambda\cdot\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu A<\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\\ &\Leftrightarrow \eta\mu(B+\Gamma)<\eta\mu B+\eta\mu\Gamma \Leftrightarrow \eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu B\eta\mu\Gamma<\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\\ &\Leftrightarrow 0<\eta\mu B(1-\sigma\upsilon\nu\Gamma)+\eta\mu\Gamma(1-\sigma\upsilon\nu B), \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύουμε και τις $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$.

Άρα, υπάρχει τρίγωνο ΚΛΜ με $(\Lambda M)=\alpha$, $(KM)=\beta$, $(K\Lambda)=\gamma$.

Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει ότι:

$$\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu K=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma},\quad \sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu\Lambda=\frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha},\quad \sigma\upsilon\nu\Gamma=\sigma\upsilon\nu M=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}.$$

Άρα $\widehat{A}=\widehat{K}$, $\widehat{B}=\widehat{\Lambda}$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{M}$.

14. Ισχύει $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ οπότε $\frac{\eta\mu A}{\alpha}=\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 A}}{\alpha}=\ldots=\rho$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\frac{\eta\mu B}{\beta}=\frac{\eta\mu\Gamma}{\gamma}=\rho$.

Για να αποδείξουμε ότι $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\pi$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\eta\mu(A+B)=\eta\mu\Gamma \quad\text{και}\quad \sigma\upsilon\nu(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\Gamma.$$

15. Είναι συνδυασμός των ασκήσεων 13 και 14.