Στα παιδιά μας

– *Μαρία-Άννα*

Μπάμπης

– *Γιώργο, Μιχάλη*

Χρήστος

Περιεχόμενα

Α΄ Μέρος: Άλγεβρα

Α΄ Μέρος: Άλγεβρα

Β΄ Μέρος: Γεωμετρία

Γ΄ Μέρος: Απαντήσεις

Α΄ Μέρος

Άλγεβρα

Ενότητα 1

✓ Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Βασική θεωρία - Παραδείγματα

ΘΕΜΑ 1ο ***α) Ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί και ποιοι άρρητοι;***
β) Από ποιους αριθμούς αποτελούνται οι πραγματικοί αριθμοί;
γ) Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) **Ρητός** λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$. Επομένως, οι αριθμοί $\frac{5}{7}$, $-\frac{2}{3}$ είναι ρητοί.
Επειδή $3=\frac{3}{1}$, $-7=\frac{-7}{1}$, συμπεραίνουμε ότι και οι φυσικοί και οι ακέραιοι είναι επίσης ρητοί αριθμοί.

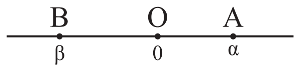
Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός. Με άλλα λόγια, άρρητοι είναι οι αριθμοί που όταν τους γράψουμε σε δεκαδική μορφή αποτελούνται από άπειρα δεκαδικά ψηφία και δεν είναι περιοδικοί.
Για παράδειγμα, ο αριθμός 2,7118235972… είναι άρρητος, ενώ ο αριθμός 2,6757575… είναι ρητός, διότι είναι περιοδικός (με περίοδο το 75).

β) Οι **πραγματικοί** αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν ένα σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$.
Για παράδειγμα οι αριθμοί:

$$7,\quad -3,\quad +4,\quad \frac{2}{3},\quad -\frac{5}{9},\quad \sqrt{2},\quad 3+\sqrt{5}$$

είναι όλοι πραγματικοί. Από αυτούς, οι $7,\ -3,\ 4,\ \frac{2}{3},\ -\frac{5}{9}$ είναι ρητοί, ενώ οι $\sqrt{2},\ 3+\sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

γ) **Απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α (τη συμβολίζουμε με $|\alpha|$) ονομάζουμε την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή Ο του άξονα. Σύμφωνα λοιπόν με το σχήμα είναι:



$$|\alpha| = OA \quad \text{και} \quad |\beta| = OB$$

Επειδή ο α είναι θετικός και ο β είναι αρνητικός, θα ισχύει $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = -\beta$. Επομένως:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν} \ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν} \ \alpha < 0 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2ο ***α) Να γραφούν οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.***

β) Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίθετοι;

γ) Πότε δύο αριθμοί λέγονται αντίστροφοι;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος – αντίστροφος	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\quad \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,\quad \alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma$	

β) Δύο αριθμοί λέγονται **αντίθετοι**, όταν έχουν άθροισμα μηδέν:

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

Για παράδειγμα, οι αριθμοί $5, -5$ όπως επίσης και οι αριθμοί $-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ είναι αντίθετοι, διότι:

$$5+(-5)=0, \qquad -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0$$

γ) Δύο αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι**, όταν έχουν γινόμενο τη μονάδα:

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1, \quad \alpha\neq 0$$

Για παράδειγμα, οι αριθμοί 5, $\frac{1}{5}$ όπως επίσης και οι αριθμοί $-\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{3}$ είναι αντίστροφοι, διότι:

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1, \qquad \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = 1$$

Σχόλιο

Ο μόνος αριθμός που δεν έχει αντίστροφο είναι το μηδέν. Επομένως:

Κάθε αριθμός διαφορετικός από το μηδέν έχει αντίστροφο.

ΘΕΜΑ 3ο ***α) Πώς προσθέτουμε δύο πραγματικούς αριθμούς;***

β) Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο πραγματικούς αριθμούς;

γ) Πώς ορίζεται η αφαίρεση $\boldsymbol{\alpha - \beta}$ ***και το πηλίκο (διαίρεση)*** $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}}$ ***(ή*** $\boldsymbol{\alpha : \beta}$***) δύο πραγματικών αριθμών α, β (με*** $\boldsymbol{\beta \neq 0}$***);***

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Για την πρόσθεση αριθμών στηριζόμαστε στους εξής κανόνες:

- Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε ως πρόσημο, το κοινό τους πρόσημο.
- Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά τους βάζουμε ως πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Επομένως θα είναι:

$$+8 + 7 = +15, \quad -6 - 7 = -13, \quad 8 - 5 = +3, \quad -10 + 6 = -4$$

β) Ο πολλαπλασιασμός δύο αριθμών στηρίζεται στους εξής κανόνες:

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε πρόσημο συν (+).
- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και βάζουμε πρόσημο πλην (–).

$$\begin{aligned}(+)\cdot(+) &= (+)\\ (-)\cdot(-) &= (+)\\ (+)\cdot(-) &= (-)\\ (-)\cdot(+) &= (-)\end{aligned}$$

γ) Η αφαίρεση $\alpha-\beta$ δύο αριθμών ορίζεται ως εξής:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

Επομένως:

Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο αριθμών, με $\beta \neq 0$, ορίζεται ως εξής:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta} \quad \text{ή} \quad \alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$$

Επομένως:

Για να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο αριθμών α, β, με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Σχόλια

i) *Για τη διαίρεση $\alpha : \beta$ ή για το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$ ισχύει ο ίδιος κανόνας προσήμων που περιγράψαμε και στον πολλαπλασιασμό.*

$$(+):(+)=(+)$$
$$(-):(-)=(+)$$
$$(+):(-)=(-)$$
$$(-):(+)=(-)$$

ii) *Τονίζουμε ότι* ***η διαίρεση με το μηδέν δεν επιτρέπεται!***

Λυμένες ασκήσεις

1. Υπολογισμός παραστάσεων

Σχόλια - Μέθοδος

Για τον υπολογισμό ή την απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων έχουμε στο νου μας τα εξής:

A. Η προτεραιότητα των πράξεων είναι η εξής:

- Εκτελούμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (εκτός και αν επιθυμούμε να κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων).
- Εκτελούμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, εκτελούμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.

B. Η απαλοιφή παρενθέσεων γίνεται ως εξής:

- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει (+), τότε παραλείπουμε τις παρενθέσεις, χωρίς να αλλάξουμε το πρόσημο των όρων που περιέχονται στις παρενθέσεις.
- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει (–), τότε παραλείπουμε τις παρενθέσεις, αλλάζουμε όμως το πρόσημο όλων των όρων που περιέχονται στις παρενθέσεις.

  Για παράδειγμα είναι:

  - $\alpha + \gamma + (\beta - \gamma - \alpha) = \alpha + \gamma + \beta - \gamma - \alpha = \beta$
  - $\alpha - \beta - (\alpha - \beta - \gamma) = \alpha - \beta - \alpha + \beta + \gamma = \gamma$

1.1 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{1}{12}\right)$ **β)** $-\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - \frac{11}{6}\right)$

γ) $-7 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - 7\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$ **δ)** $\left(1 - \frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) - \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)$

ΛΥΣΗ

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις που ακολουθούν θα απλοποιήσουμε αφού πρώτα βγάλουμε τις παρενθέσεις με εφαρμογή του γνωστού κανόνα.

α)
$$\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{12}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\overset{4}{\frac{2}{3}}+\overset{3}{\frac{1}{4}}-\overset{6}{\frac{1}{2}}-\overset{1}{\frac{1}{12}}=$$
$$=\frac{8+3-6-1}{12}=\frac{11-7}{12}=\frac{4}{12}=\frac{4}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}$$

β)
$$-\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{11}{6}\right)=+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{11}{6}=$$

[αλλάζουμε τη σειρά των όρων]

$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{6}-\frac{11}{6}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{6}{3}+\frac{-6}{6}-\frac{4}{2}=2-1-2=-1$$

γ)
$$-7\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-7\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{2}-\frac{2}{3}-7\left(\overset{3}{\frac{1}{2}}-\overset{2}{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{7}{2}-\frac{2}{3}-7\cdot\frac{3-4}{6}=$$
$$=-\frac{7}{2}-\frac{2}{3}-7\cdot\frac{-1}{6}=-\overset{3}{\frac{7}{2}}-\overset{2}{\frac{2}{3}}+\overset{1}{\frac{7}{6}}=\frac{-21-4+7}{6}=-\frac{18}{6}=-3$$

δ)
$$\left(\frac{1}{1}-\frac{7}{2}\right)\left(\overset{5}{\frac{1}{2}}-\overset{2}{\frac{4}{5}}\right)-\frac{3}{5}:\left(-\overset{3}{\frac{2}{5}}+\overset{5}{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2-7}{2}\cdot\frac{5-8}{10}-\frac{3}{5}:\frac{-6+10}{15}=$$
$$=\frac{-5}{2}\cdot\frac{-3}{10}-\frac{3}{5}:\frac{4}{15}=\frac{15}{20}-\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3}{4}-\frac{45}{20}=\frac{3}{4}-\frac{9}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

2. Σύνθετα κλάσματα

Σχόλια - Μέθοδος

Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό, στηριζόμαστε στις παρακάτω ιδιότητες:

- $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\dfrac{\alpha}{\beta}:\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\delta}{\gamma}=\dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$
- $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta}:\gamma=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta\gamma}$
- $\dfrac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}}=\alpha:\dfrac{\beta}{\gamma}=\alpha\cdot\dfrac{\gamma}{\beta}=\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}$

Άλλος τρόπος

Μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας τον τύπο:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\text{γινόμενο άκρων}}{\text{γινόμενο μέσων}} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

Επομένως:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}} = \frac{\alpha \cdot 1}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}, \qquad \frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\beta}{\gamma}} = \frac{\alpha\gamma}{\beta \cdot 1} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$$

1.2 **Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1}{3-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}$ **β)** $\dfrac{-2\cdot 3-\frac{1}{4}}{-2\left(3-\frac{1}{4}\right)}$ **γ)** $-7+\dfrac{-3-\frac{1}{3}}{-2+\frac{1}{3}}$

ΛΥΣΗ

Αν και μπορούμε να κάνουμε τις πράξεις όλες μαζί, για λόγους ευκολίας θα εκτελέσουμε χωριστά τις πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή.

α) Ο αριθμητής γράφεται:

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1 = -\overset{3}{\frac{1}{2}}+\overset{2}{\frac{2}{3}}-\overset{6}{\frac{1}{1}} = \frac{-3+4-6}{6} = -\frac{5}{6}$$

Ο παρονομαστής γράφεται:

$$3-\frac{1}{6}+\frac{1}{2} = \overset{6}{\frac{3}{1}}-\overset{1}{\frac{1}{6}}+\overset{3}{\frac{1}{2}} = \frac{18-1+3}{6} = \frac{20}{6}$$

Επομένως:

$$\frac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1}{3-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{20}{6}} = \frac{-5\cdot 6}{6\cdot 20} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4}$$

β) Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Ο αριθμητής γράφεται:

$$-2\cdot 3-\frac{1}{4} = -\overset{4}{\frac{6}{1}}-\overset{1}{\frac{1}{4}} = \frac{-24-1}{4} = -\frac{25}{4}$$

Ο παρονομαστής γράφεται:

$$-2\left(3-\frac{1}{4}\right)=-2\left(\overset{4}{\frac{3}{1}}-\overset{1}{\frac{1}{4}}\right)=-2\cdot\frac{12-1}{4}=-2\cdot\frac{11}{4}=-\frac{22}{4}$$

Επομένως το κλάσμα γίνεται:

$$\frac{-2\cdot 3-\frac{1}{4}}{-2\left(3-\frac{1}{4}\right)}=\frac{-\frac{25}{4}}{-\frac{22}{4}}=\frac{25\cdot 4}{4\cdot 22}=\frac{25}{22}$$

Είναι φανερό ότι οι πράξεις μπορούν να γίνουν συγχρόνως σε όλη την παράσταση.

γ) Ας δούμε εδώ τις πράξεις να γίνονται συγχρόνως σε όλη την παράσταση.

Είναι:

$$-7+\frac{-3-\frac{1}{3}}{-2+\frac{1}{3}}=-7+\frac{-\overset{3}{\frac{3}{1}}-\overset{1}{\frac{1}{3}}}{-\overset{3}{\frac{2}{1}}+\overset{1}{\frac{1}{3}}}=-7+\frac{\frac{-9-1}{3}}{\frac{-6+1}{3}}=-7+\frac{\frac{-10}{3}}{\frac{-5}{3}}=-7+\frac{(-10)\cdot 3}{3\cdot(-5)}=$$

$$=-7+\frac{-30}{-15}=-7+2=-5$$

3. Επιμεριστική ιδιότητα

Σχόλια - Μέθοδος

Υπενθυμίζουμε τη σπουδαία ιδιότητα των αριθμών, γνωστή σε όλους μας ως **επιμεριστική ιδιότητα**:

$$\boldsymbol{\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,\quad \alpha(\beta-\gamma)=\alpha\beta-\alpha\gamma}$$

Επομένως θα είναι:

- $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)=\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta\gamma-\beta\alpha+\gamma\alpha-\gamma\beta=0$
- $\alpha(\beta-\gamma)-\beta(\alpha-\gamma)-\gamma(\beta-\alpha)=\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\alpha+\beta\gamma-\gamma\beta+\gamma\alpha=0$
- $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$

1.3 **Αν $x+y=-5$ και $\omega+\varphi=-7$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $A=4-(x-\omega)-(y-\varphi)$

β) $B=-(-5-x+\varphi)+(-8+y)-(\omega-4)$

ΛΥΣΗ

α) Θα απαλείψουμε τις παρενθέσεις. Είναι:

$$A = 4 - (x - \omega) - (y - \varphi) = 4 - x + \omega - y + \varphi = 4 - x - y + \omega + \varphi$$

Επειδή $-x - y = -(x + y)$ και $\omega + \varphi = -7$, παίρνουμε:

$$A = 4 - (x + y) + (\omega + \varphi) = 4 - (-5) + (-7) = 4 + 5 - 7 = 2$$

β) Θα εργαστούμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Έχουμε:

$$B = -(-5 - x + \varphi) + (-8 + y) - (\omega - 4) =$$
$$= 5 + x - \varphi - 8 + y - \omega + 4 = (x + y) - \varphi - \omega + 1 =$$
$$= (x + y) - (\varphi + \omega) + 1 = -5 - (-7) + 1 = -5 + 7 + 1 = 3$$

1.4 **Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:**

α) $\mathbf{A = 2(\alpha - 3) - 3(\alpha - 2) - (-\alpha + 3)}$

β) $\mathbf{B = -2(\alpha - 2\beta + 3) + 3(2\alpha - \beta - 1) - 2\left(2\alpha + \frac{1}{2}\beta - 4\right)}$

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις που βρίσκονται μέσα στις παρενθέσεις δεν απλοποιούνται. Από την άλλη μεριά, δεν μπορούμε να απαλείψουμε τις παρενθέσεις, διότι έχουμε πολλαπλασιασμούς. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$$

Επειδή $2(\alpha - 3) = 2\alpha - 6$ και $-3(\alpha - 2) = -3\alpha + 6$, παίρνουμε:

$$A = 2(\alpha - 3) - 3(\alpha - 2) - (-\alpha + 3) = 2\alpha - 6 - 3\alpha + 6 + \alpha - 3 =$$
$$= 2\alpha - 3\alpha + \alpha - 6 + 6 - 3 = -3$$

β) Χρησιμοποιούμε και εδώ αναγκαστικά την επιμεριστική ιδιότητα, αφού απαλοιφή παρενθέσεων δεν μπορεί να γίνει. Είναι λοιπόν:

$$B = -2(\alpha - 2\beta + 3) + 3(2\alpha - \beta - 1) - 2\left(2\alpha + \frac{1}{2}\beta - 4\right) =$$
$$= -2\alpha + 4\beta - 6 + 6\alpha - 3\beta - 3 - 4\alpha - \beta + 8 =$$
$$= -2\alpha + 6\alpha - 4\alpha + 4\beta - 3\beta - \beta - 6 - 3 + 8 = 0 + 0 - 1 = -1$$

διότι:

$$-2\alpha + 6\alpha - 4\alpha = 0 \quad \text{και} \quad 4\beta - 3\beta - \beta = 0$$

Προτεινόμενες ασκήσεις

Βασικές ασκήσεις

1.5 Να βρείτε τα εξαγόμενα στις παρακάτω πράξεις:

α) $(-3)+(-8)$ **β)** $(-5)+(+13)$ **γ)** $-\frac{1}{5}+\frac{6}{5}$

δ) $\left(+\frac{2}{7}\right)-\left(-\frac{5}{7}\right)$ **ε)** $(-3)\left(-\frac{5}{3}\right)$ **στ)** $\left(-\frac{7}{3}\right)\left(+\frac{6}{7}\right)$

ζ) $(-8):(-4)$ **η)** $\left(-\frac{10}{3}\right):\left(+\frac{5}{6}\right)$

1.6 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A=(-8):(-2)+(-5)(+2)+\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{10}{3}\right)$

β) $B=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{3}{8}\right)-(-2)\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\right)$

1.7 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A=-(-\alpha+\beta-2)+(\alpha-2\beta+3)-(2\alpha-3\beta)+5$

β) $B=-[-(\alpha-\beta+1)+(-\alpha+\beta)]+[-2\alpha-(-2\beta+3)]$

1.8 Να κάνετε τα σύνθετα κλάσματα απλά:

α) $\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2-\frac{2}{3}}$ **β)** $\dfrac{-2-\frac{3}{2}}{3+\frac{1}{2}}$ **γ)** $\dfrac{2-3-\frac{1}{3}}{3-5-\frac{4}{3}}$ **δ)** $\dfrac{2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{3+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}$

1.9 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=-2(3\alpha-3)+3(3+2\alpha)-10$

β) $B=3(2\alpha+\beta-1)-2(\alpha-\beta+1)-4(\alpha+\beta-1)-\beta$

γ) $\Gamma=-3(\alpha-\beta+2)+2(\alpha-\beta+3)-(-\alpha+\beta+5)$

1.10 Αν $\alpha-\beta=-2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A=2(\alpha-\beta-2)-3(2\alpha-2\beta+1)-5$

β) $B=2(2\alpha-\beta+1)-(\alpha+\beta-2)-3(\beta-\alpha)$

Η συστηματοποίηση των ασκήσεων

1. Υπολογισμός παραστάσεων

1.11 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $(-5+8-4)(4-7+1)-(-6+2-8):(-1+3+4-8)$

β) $(-4)\left(-2+\frac{3}{4}\right)-(-6):\left(-4+3+\frac{2}{5}\right)$

1.12 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $A=-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{6}{4}\right)$

β) $B=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right):\left(+\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

1.13 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A=\frac{(-2)(+3)+(-15):(-3)+(-3)(-5-2)}{(+20):(-4)-(-5)(-2)-5(-3+4)}$

β) $B=\frac{(-18):(+2)-(-8)(+2)-(-2)(6-8)}{(-4)(-2)+(-5):(+5)+2(3-5)}$

1.14 Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $(-2)\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{10}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{7}{5}\right)$

β) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(+\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{3}\right):(-2)$

1.15 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A=-(\alpha-\beta-2)+(-\alpha+\beta-3)-(-2\alpha+2\beta-7)$

β) $B=-[-(\alpha-2\beta+1)+(-\alpha+3\beta-2)]-(2\alpha-5\beta+2)$

2. Σύνθετα κλάσματα

1.16 Να μετατρέψετε σε απλά τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα:

α) $\frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{10}}$ **β)** $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{30}}$ **γ)** $\frac{6}{-\frac{2}{5}}$ **δ)** $\frac{\frac{7}{8}}{3}$

1.17 Να μετατρέψετε σε απλά τα παρακάτω κλάσματα:

α) $A = \dfrac{2-\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}{2+\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}}$ **β)** $B = \dfrac{3+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}{3-\dfrac{1}{3-\frac{1}{3}}}$

1.18 Αν $\alpha = 2-\dfrac{3-\frac{5}{2}}{2+\frac{1}{2}}$ και $\beta = 4-\dfrac{3+\frac{2}{3}}{3-\frac{4}{3}}$, να βρείτε:

α) τον αριθμό $\dfrac{\alpha}{\beta}$, **β)** τον αριθμό $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-2\right)^{2004}$.

1.19 Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \dfrac{1}{7}+\dfrac{(-2)\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$ και $\beta = 1+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{(-2)\left(+\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $\dfrac{\alpha}{\beta}$. **β)** Να βρείτε τον αριθμό $\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{2007}$.

1.20 Αν $\alpha = \dfrac{1}{7}$ και $\beta = \dfrac{1}{3}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\alpha + \frac{2\beta}{1-\beta^2}\right) : \left(1-\alpha\frac{2\beta}{1-\beta^2}\right)$$

3. Επιμεριστική ιδιότητα

1.21 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $A = 2(-3+\alpha) - 3(\alpha-2) + \alpha + 2$

β) $B = -[-2(\alpha-1) + 3(2\alpha-5)] - 2(7-2\alpha)$

1.22 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = 2[3(2-3x) - 2(3-2x)] - 5[-2(3+x) + 3(x+2)]$

β) $B = 7 - 6\{5 - 4[3 - 2(1-x)]\} - 6(8x-4)$

1.23 Αν $\alpha - \beta = 1$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $4(\alpha-\beta-2) - 2(\alpha-\beta-5)$

β) $2(3\alpha-3\beta+1) - 3(2-2\alpha+2\beta) - \alpha + \beta$

1.24 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = -\{-[-(-\alpha+\beta)-(3\alpha-\beta-3)]\} - [-(2\alpha-\beta)-(2\beta-3)]$

β) $B = -\{-[-2(\alpha+\beta-\gamma)-(\gamma-\beta)]+[-3(\alpha-\gamma)+(-\beta+\gamma)]-3\gamma\}$

4. Μαθηματικές προκλήσεις

1.25 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{3\alpha+8\beta}{9\alpha+4\beta}$.

1.26 Ο κωδικός της πιστωτικής κάρτας ενός μαθηματικού είναι εξαψήφιος αριθμός. Δύο από τα ψηφία φαίνονται στο σχήμα (το πρώτο είναι 2 και το πέμπτο είναι 5). Ο ιδιοκτήτης της γνωρίζει ακόμα ότι το γινόμενο οποιονδήποτε τριών διαδοχικών ψηφίων του κωδικού είναι πάντοτε ίσο με 30. Ποιον κωδικό έχει η κάρτα;

2				5	

1.27 Στο διπλανό μαγικό τετράγωνο το άθροισμα των τριών αριθμών κάθε γραμμής, κάθε στήλης και κάθε διαγωνίου είναι ίσο με 21. Δυστυχώς οι οχτώ αριθμοί σβήστηκαν κατά λάθος. Μπορείτε να βρείτε το άθροισμα των τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται στις γωνίες του μαγικού αυτού τετραγώνου;

	7	

1.28 Αν οι αριθμοί αβ και γδ είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha\beta + \frac{1}{\gamma\delta}}{\alpha + \frac{1}{\beta\gamma\delta}}$$

1.29 Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots + \frac{21}{20}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{20}\right)$$

1.30 Πόσα ψηφία έχει ο μικρότερος φυσικός αριθμός του οποίου το άθροισμα των ψηφίων είναι ίσο με 100; Ποιο είναι το πρώτο ψηφίο του αριθμού αυτού;

1.31 Αν ο ρ είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $27\rho + 1$ είναι σύνθετος.

ΕΜΕ, Θαλής – 2006